

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS EM PLACAS  
CIRCULARES DE ESPESSURA UNIFORME  
COM CARREGAMENTO RADIAL

ARNO BLASS

Tese submetida ao Corpo Docente da Coordenação dos Programas Pós-Graduados de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

Aprovada por

---

---

---

Fevereiro de 1968

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Luiz Bevilacqua,  
orientador dêste trabalho;  
A todos, pessoas ou instituições,  
a quem, de uma forma ou de outra,  
devo, pela meta que hoje cumpro.

# DEDICATÓRIA

Professor João David Ferreira Lima  
Professor Caspar Erich Stemmer

Sua atuação esclarecida à frente da  
Universidade Federal de Santa Cata-  
rina, e de sua Escola de Engenharia  
Industrial, criaram as condições pa-  
ra nossa vinda a êsse curso.

## I N D I C E

Sumário . . . . .	1
Capítulo I - Equação geral das vibrações transversais de placas de espessura uniforme .	3
Capítulo II - Placa circular apoiada em sua periferia, e uniformemente comprimida ao longo da mesma . . . . .	20
Capítulo III - Placa circular com furo, engastada num eixo, e uniformemente comprimida ao longo da periferia . . . . .	24
Conclusão . . . . .	38
Bibliografia . . . . .	40
Nomenclatura . . . . .	41
Figuras . . . . .	42
Anexos . . . . .	44
Tabelas . . . . .	47
Diagramas . . . . .	52

## S U M Á R I O

O presente trabalho representa uma introdução ao estudo das vibrações transversais de <sup>placas de</sup> espessura uniforme, com carregamento radial, e visa fornecer elementos para a resolução do problema das vibrações transversais em discos girantes como, por exemplo, é o caso de rotores de turbinas.

Inicialmente é instituída a equação diferencial que descreve o fenômeno, de forma geral, aplicável a placas de espessura uniforme, mas sem limitação quanto à forma ou tipo de carregamento. Para tanto, foi empregado o método da energia.

Esta equação é obtida diretamente em coordenadas polares e é, a seguir, particularizada para os casos axi-simétricos.

Resolve-se, depois, o problema da placa circular, sem furos, apoiada em sua periferia, e uniformemente comprimida ao longo da mesma. É possível, nestas condições, obter-se uma solução analítica. A equação que fornece os autovalores é constituída, porém, por cocientes de funções de Bessel, de modo que a obtenção das frequências de vibração do sistema, e da carga de instabilidade, deve ser feita numericamente.

O problema abordado em seguida, é o da placa circular engastada num eixo, e uniformemente comprimida ao longo da periferia. É obtida a equação diferencial, e um valor aproximado da primeira frequência de vibração do sistema, pe-

lo método de Rayleigh-Ritz. O problema foi resolvido numéricamente, num caso particular, empregando-se o computador digital IBM-1130, do Departamento de Cálculo Científico da Coordenação dos Programas Pós-Graduados de Engenharia da UFRJ, para relações de diâmetros entre eixo e placa iguais a 0,4 , 0,3 e 0,2 , obtendo-se, em cada caso, os dois primeiros modos de vibração. No trabalho é descrita a técnica empregada para a determinação das frequências, e feita uma comparação entre os resultados obtidos.

As frequências foram obtidas com auxílio da curva indicatriz, cuja obtenção é descrita no decorrer do trabalho, e que parece ser um instrumento mais expedito do que o método de Rayleigh-Ritz, no estudo de sistemas contínuos.

## CAPÍTULO I - EQUAÇÃO GERAL DAS VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE PLACAS DE ESPESSURA UNIFORME

Serão consideradas neste estudo apenas placas finas, isto é, para as quais a espessura é pequena, relativamente às demais dimensões.

Considerando, inicialmente, o caso mais geral, de placas com carregamento transversal e lateral, torna-se possível equacionar três parcelas de energia de deformação:

- a- Energia de deformação devida à flexão da placa;
- b- Energia de deformação devida ao carregamento transversal;
- c- Energia de deformação devida ao carregamento lateral.

### A - Energia de deformação devida à flexão da placa

Devido à suposição de que a espessura da placa é pequena, relativamente às demais dimensões, e restringindo-nos exclusivamente ao estudo de pequenas deformações, podemos admitir como válidas as afirmações seguintes:

- 1- Os pontos situados sobre uma normal à superfície média, permanecem, após a deformação, sobre uma reta normal à superfície média deformada;
- 2- A superfície média deformada não é sujeita a alonga-

podemos exprimir as componentes de deformação de um ponto situado a uma distância  $z$  da superfície média, em termos dos deslocamentos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , obtendo:

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} ; \quad \epsilon_\theta = -\frac{z}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2z}{r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (1-I)$$

Em virtude da hipótese (3), e considerando  $\sigma_z$  desprezável em relação às demais tensões, podemos escrever, de acordo com a Lei de Hooke, e introduzindo as relações acima,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r) = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= G \gamma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{r\theta} = \frac{Ez}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) = \\ &= \frac{Ez(1-\nu)}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (2-I)$$

A energia de deformação se exprime por

$$V = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} (\sigma_r \epsilon_r + \sigma_\theta \epsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) dV$$

onde a integração deve ser estendida ao longo de todo o volume da placa. Introduzindo nesta as expressões (1-I) e (2-I), obtemos, então, a energia de deformação devida à flexão da placa:



$$V_f = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint_{(V)} z^2 \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2(1-\nu)}{r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right\} dv$$

Integrando relativamente à variável  $z$ , entre  $-h/2$  e  $+h/2$ , somando e subtraindo ao integrando as parcelas

$$\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad \text{e} \quad \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

considerando que o Laplaciano, em coordenadas polares, se exprime por

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

e que a rigidez à flexão das placas se define por

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

obtemos, finalmente,

$$V_f = \frac{D}{2} \iint_{(S)} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} dS, \quad (3-I)$$

onde  $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$ . Esta é a expressão que procuramos, e que usaremos mais adiante. A integral dupla deve ser extendida ao longo de tãda a superfície da placa.

### B - Energia de deformação devida ao carregamento transversal

Supondo que  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\tau_{r\theta}$  são as tensões reativas produzidas pelo carregamento transversal, temos, a partir das relações (2-1), e supondo, novamente, que  $\sigma_z$ ,  $\tau_{z\theta}$  e  $\tau_{zr}$  são desprezáveis em presença das demais tensões, que

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) ; \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) ;$$

$$\text{e } \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{2\nu}{E}(1 + \nu)\tau_{r\theta}$$

Introduzindo estas relações na expressão (2-1), obtemos, então, a energia de deformação devida ao carregamento transversal:

$$V_t = \frac{1}{2E} \iiint_{(V)} [\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_\theta + 2(1 + \nu)\tau_{r\theta}^2] dV$$

Somando e subtraindo ao integrando a parcela  $2\sigma_r\sigma_\theta$ , integrando relativamente a  $z$ , e considerando que  $N_r = h\sigma_r$ ,  $N_\theta = h\sigma_\theta$  e  $N_{r\theta} = h\tau_{r\theta}$  são as forças distribuídas ao longo da espessura da placa, para cada par  $(r, \theta)$ , obtemos, finalmente,

$$V_t = \frac{1}{2hE} \iint_{(S)} [(N_r + N_\theta)^2 + 2(1 + \nu)(N_{r\theta}^2 - N_r N_\theta)] dS \quad (4-1)$$

### C - Energia de deformação devida ao carregamento lateral

Suponhamos, agora, aplicada a carga lateral. Isto provocará flexão adicional da placa, e, portanto, deformação adicional da superfície média, que não pode, agora, ser desprezada, já que, por pequena que seja essa deformação adicional, sua combinação com as forças finitas  $N_r$ ,  $N_\theta$  e  $N_{r\theta}$  pode dar origem a parcelas de energia de deformação da mesma or-

dem da energia devida à flexão.

Sejam  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  as componentes de deslocamento de um ponto da superfície média nas direções  $\underline{r}$ ,  $\underline{\theta}$  e  $\underline{z}$ , respectivamente. Considerando o elemento linear AB dessa superfície média na direção  $\underline{r}$ , pode-se observar, da fig. II, que o alongamento de AB devido ao deslocamento  $\underline{u}$  é expresso por  $\frac{\partial u}{\partial r} dr$ . O alongamento do mesmo elemento linear devido ao deslocamento  $\underline{w}$  é  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dr$ , como se pode observar da comparação do comprimento de  $A_1B_1$  com o comprimento de sua projeção sobre o eixo  $\underline{r}$ . Assim sendo, o alongamento total unitário na direção de  $\underline{r}$  de um elemento tomado na sua superfície média da placa será

$$\epsilon_r' = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (5-I)$$

Analogamente, pela fig. III, obtém-se, na direção  $\underline{\theta}$ ,

$$\epsilon_{\theta}' = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \quad (6-I)$$

Considerando, agora, a deformação angular no plano médio, devida à flexão, concluímos, comparando, na fig. IV, os ângulos AOT e A'O'T', que a parcela devida aos deslocamentos  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  é expressa por  $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$ . Para determinar a parcela devida ao deslocamento  $\underline{w}$ , tomamos dois elementos infinitesimais OA, radial, e OB, tangencial (fig. IV). Tiremos OT tangente a OB por O. Devido aos deslocamentos na direção  $\underline{z}$ , estes elementos assumem as posições  $O_1A_1$ ,  $O_1B_1$  (não representada na figura) e  $O_1T_1$ , respectivamente. A diferença entre o ângulo  $\pi/2$  e o ângulo  $A_1O_1T_1$  é a deformação angular corres-

pondente ao deslocamento  $\underline{w}$ . Para determinar esta diferença, consideraremos o ângulo reto  $A_1O_1T_2$ , em que  $T_2O_1$  é paralelo a  $T_1O_1$ . Girando o plano  $A_1O_1T_2$  ao redor de  $O_1A_1$  de um ângulo  $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}$ , fazemo-lo coincidir com o plano  $A_1O_1T_1$ , e trazemos o ponto  $T_2$  à posição C. O deslocamento  $T_2C$  é expresso por  $\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}\right) r d\theta$  e é inclinado relativamente à vertical  $T_2T_1$  do ângulo  $\frac{\partial w}{\partial r}$ . Consequentemente,  $T_1C$  é igual a  $\frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot r d\theta$ , e o ângulo  $CO_1T_1$ , que representa a deformação angular correspondente ao deslocamento  $\underline{w}$ , é, então,  $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}$ . Somando esta às deformações produzidas pelos deslocamentos  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$ , obtemos

$$\gamma'_{re} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (7-I)$$

As expressões (5-I), (6-I) e (7-I) representam as componentes da distorsão adicional na superfície média da placa, em virtude de pequenos deslocamentos. Considerando-as muito pequenas em comparação com as componentes  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_\theta$  e  $\gamma_{re}$ , usadas na obtenção da fórmula (4-I), podemos supor que as forças  $N_r$ ,  $N_\theta$  e  $N_{re}$  permanecem constantes durante a flexão. Com esta hipótese, a energia de deformação adicional da placa, devida à distorsão produzida na superfície média por flexão será

$$V_e = \iint_{(S)} (N_r \epsilon'_r + N_\theta \epsilon'_\theta + N_{re} \gamma'_{re}) dS,$$

e introduzindo nesta expressão os resultados obtidos anteriormente, obtemos, ao final,

$$V_e = \iint_{(S)} \left[ N_r \frac{\partial u}{\partial r} + N_\theta \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + N_{re} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right] dS + \\ + \frac{1}{2} \iint_{(S)} \left[ N_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + N_\theta \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2N_{re} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] dS \quad (8-I)$$

## D - Instituição da Equação Diferencial

A equação diferencial geral das vibrações transversais de placas é obtida a partir do Princípio de Hamilton:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(V_f + V_t + V_\ell - T) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta A \cdot dt \quad (9-I)$$

onde

$V_f$ ,  $V_t$  e  $V_\ell$  representam as energias de deformação já obtidas, e representadas pelas fórmulas (3-I), (4-I) e (8-I);

$T$  é a energia cinética, expressa por

$$T = \frac{1}{2} \gamma h \iint_{(S)} (\dot{w})^2 dS, \quad (10-I)$$

sendo  $\gamma$  a massa específica do material da placa, e  $h$  a espessura da mesma, suposta constante; e

$\delta A$  é a variação do trabalho das forças externas, expressa por

$$\delta A = \iint_{(S)} q(r, \theta) \delta w dS, \quad (11-I)$$

em que  $q(r, \theta)$  é a carga que atua sobre a placa.

Calculemos as variações mencionadas no primeiro membro da equação (9-I), levando em conta que as variações de  $u$  e  $v$ , e de suas derivadas, são desprezáveis em face das variações de  $w$  e de suas derivadas. Obtemos:

$$\delta V_f = D \iint_{(S)} \left\{ \nabla^2 w \nabla^2 \delta w - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial r \partial \theta} \right) \right] \right\} dS \quad (12-I)$$

$$\delta V_t = 0 \quad (13-I)$$

$$\delta V_\ell = \iint_{(S)} \left[ N_r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial r} + N_\theta \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + N_{r\theta} \cdot \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] dS \quad (14-I)$$

$$T = \gamma h \iint_{(S)} \dot{w} \delta \dot{w} dS \quad (15-I)$$

Levando em conta que

$$\nabla^2 (\nabla^2 w) = \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \\ - \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}$$

e utilizando os elementos contidos no Anexo I, podemos reescrever as expressões (12-I) a (15-I) na forma que segue:

$$\delta V_f = D \iint_{(S)} \nabla^4 w \delta w r dr d\theta + \\ + D \iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r (\nabla^2 w \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial r} - \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} \cdot \delta w) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \nabla^2 w \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \theta} \cdot \delta w \right) \right\} dr d\theta -$$

$$\begin{aligned}
& - D(1 - \nu) \iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \delta w \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \delta w \right] \right\} dr d\theta \quad (16-I)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta V_0 &= \iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( N_r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + N_{r\theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \delta w \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( N_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta w \right] \right\} dr d\theta - \\
& - \iint_{(S)} \left[ r \cdot N_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + N_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + 2N_{r\theta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right] \delta w dr d\theta \quad (17-I)
\end{aligned}$$

$$\delta T = - \gamma h \iint_{(S)} \ddot{w} \delta w r dr d\theta \quad (18-I)$$

As expressões (16-I) e (17-I) precisam, ainda, ser modificadas, para servirem ao fim que almejamos. Trabalhando inicialmente sobre  $\delta V_f$ , e denominando  $\delta V_{f_1}$ ,  $\delta V_{f_2}$  e  $\delta V_{f_3}$ , respectivamente, a cada uma das integrais que comparecem no segundo membro da (16-I), podemos escrever, pela aplicação do Teorema de Green, em coordenadas polares, a  $\delta V_{f_2}$ , que

$$\delta V_{f_2} = D \int_{(C)} \left( \nabla^2 w \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial n} - \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} \cdot \delta w \right) ds, \quad (19-I)$$

onde a integral simples deve ser efetuada ao longo do contorno da placa, e onde  $\underline{n}$  representa a direção normal, e  $\underline{s}$  a direção tangencial a êsse contorno, conforme a fig. V.

Outrossim, considerando que

$$\frac{\partial \delta w}{\partial r} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \cdot \sin \varphi$$

e que

$$\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial \delta w}{\partial s} \cdot \cos \varphi \right) r$$

e, ainda, que, pelo Teorema de Green

$$\iint_{(S)} \left[ \frac{\partial(rq_1)}{\partial r} + \frac{\partial q_2}{\partial \theta} \right] dr d\theta = \int_{(C)} (q_1 \cdot \cos \varphi + q_2 \cdot \sin \varphi) ds$$

pondo, em nosso caso,

$$q_1 = \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial r} + \left( \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} +$$

$$+ \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \delta w$$

$$q_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \delta w$$

obtemos

$$\delta V_{f_3} = D(1 - \nu) \iint_{(S)} \left( \frac{\partial(rq_1)}{\partial r} + \frac{\partial q_2}{\partial \theta} \right) dr d\theta =$$

$$= D(1 - \nu) \int_{(C)} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} \left[ \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \varphi + \right. \right.$$

$$+ \left. \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \sin^2 \varphi \right] +$$

$$+ \frac{\partial \delta w}{\partial s} \left[ \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \cos^2 \varphi + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] +$$

$$+ \delta w \left[ \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \cos \varphi + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \right] \Bigg\} ds \quad (20-I)$$



Nesta expressão, a segunda parcela pode ser integrada por partes:

$$\int_{(C)} \frac{\partial \delta w}{\partial s} \cdot f(r, \theta) ds = \delta w \cdot f(r, \theta) \Big|_{(C)} - \int_{(C)} \delta w \cdot \frac{\partial f}{\partial s} ds, \quad (21-I)$$

e já que  $\delta w$  se anula no contorno da placa, o primeiro termo do segundo membro de (21-I) se anula. Assim sendo, coletando os resultados obtidos em (19-I), (20-I) e (21-I), e levando-os à fórmula (16-I), escrevemos, finalmente:

$$\begin{aligned} \delta V_f = & D \iint_{(S)} \nabla^4 w \delta w dr d\theta + D \int_{(C)} \left( \nabla^2 w \cdot \frac{\nabla \delta w}{\partial n} - \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} \cdot \delta w \right) ds - \\ & - D(1 - \nu) \int_{(C)} \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial n} \left[ \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ & + \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \cos \varphi + \left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \sin^2 \varphi \right] - \\ & - \delta w \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \cos^2 \varphi + \right. \\ & + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \left. \right] + \\ & + \delta w \left[ \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \cos \varphi + \right. \\ & + \left. \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] \Big\} ds \quad (22-I) \end{aligned}$$

Tomando a equação (17-I) e pondo, análogamente,

$$q_1 = \left( N_r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + N_{r\theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \delta w$$

e

$$q_2 = \left( N_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \delta w$$

podemos reescrever, também,  $\delta V$  na forma

$$\begin{aligned} \delta V_{\ell} = & \int_{(C)} \left[ \left( N_r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + N_{r\theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \left( N_{\theta} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \sin \varphi \right] \delta w \, ds - \quad (23-I) \\ & - \iint_{(S)} \left[ N_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{N_{\theta}}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2N_{r\theta}}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right] \delta w \, r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

Coletando os resultados representados pelas equações (18-I), (22-I) e (23-I), e levando-os à equação (9-I), representativa do Princípio de Hamilton, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \iint_{(S)} \left\{ \nabla^4 w + \left[ N_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{N_{\theta}}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2N_{r\theta}}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \gamma \ddot{h} \ddot{w} - q(r, \theta) \right\} \delta w \, r \, dr \, d\theta + \right. \\ & + D \int_{(C)} \left\{ \nabla^2 w - (1 - \nu) \left[ \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \sin^2 \varphi \right] \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cdot ds + \\ & + D \int_{(C)} \left\{ (1 - \nu) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] - \right. \\ & \quad \left. - \left[ \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \cos \varphi + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \right] (1 - \nu) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} + \frac{1}{D} \left[ \left( N_r \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{N_{r\theta}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cos \varphi + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{N_{\theta}}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) \sin \varphi \right] \right\} \delta w \, ds \, dt = 0 \end{aligned}$$

Já que  $\delta w$  foi tomado arbitrariamente, a equação acima será satisfeita para quaisquer valores de  $\delta w$  no interior da placa ou em seu contorno, e para qualquer valor de  $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$  no contorno da placa, desde que sejam satisfeitas as condições

$$D\nabla^4 w - \left[ N_r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2N_{r\theta}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right] + \gamma h \ddot{w} - q(r, \theta) = 0 \quad (24-I)$$

$$\nabla^2 w = (1 - \nu) \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \varphi + \left( \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \varphi \right] \quad (25-I)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} = (1 - \nu) & \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \cos^2 \varphi + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] - \right. \\ & - \left[ \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \varphi \right] \Big\} + \\ & + \frac{1}{D} \left[ \left( N_r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{N_{r\theta}}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cos \varphi + \left( \frac{N_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \sin \varphi \right] \quad (26-I) \end{aligned}$$

A equação (24-I) constitui a equação diferencial das vibrações transversais de placas com carregamento transversal e lateral, enquanto que as equações (25-I) e (26-I) constituem as condições de contorno, devendo, por isso mesmo, ser calculadas no contorno da placa.

A estas se devem adicionar, ainda, as condições iniciais, que determinam a deflexão da placa, e seu estado de velocidade, no instante  $t = 0$ :

$$w(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

e

(27-I)

$$\dot{w}(r, \theta, 0) = g(r, \theta).$$

### E - Particularização a placas circulares e casos axi-simétricos

Quando se tem uma placa circular, o ângulo  $\varphi$ , entre o vetor posição de um ponto do contorno da placa e a normal ao contorno (Ver fig. V) é constante e nulo, desde que se tome o polo do sistema de referência no centro da placa. Outrossim, a direção  $\underline{r}$  coincide com a direção normal ao contorno, e por isso, as condições de contorno mencionadas ao final da página anterior se simplificam, respectivamente, para

$$\nabla^2 w = (1 - \nu) \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} = & \left\{ \frac{1}{D} \left( N_r \cdot \frac{w}{r} + \frac{N_{r\theta}}{r} \cdot \frac{w}{\theta} \right) + \right. \\ & \left. + (1 - \nu) \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) - \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Se particularizarmos ainda mais, para o caso de vibrações axi-simétricas, as derivadas em relação a  $\theta$  se anulam, e a equação diferencial e suas condições de contorno se reescrevem na forma

$$D\nabla^4 w - N_r \cdot \nabla^2 w + \gamma h \ddot{w} - q(r) = 0 \quad (28-I)$$

$$\nabla^2 w = \frac{1-\nu}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial r} = \frac{N_r}{D} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{No contorno})$$

onde, agora,

$$\begin{aligned} \nabla^4 w &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned}$$

em que só ainda escrevemos derivadas parciais porque a equação diferencial depende, ainda, do tempo.

Por mera conveniência operacional, vamos fazer uma mudança de variável, para o caso das vibrações axi-simétricas em placas circulares, adimensionalizando a variável livre.

Pondo

$$\rho = \frac{r}{r_e},$$

onde  $r_e$  é o raio externo da placa, temos, para  $n = 1, 2, \dots$ , como válidas as relações

$$r^n = r_e^n \cdot \rho^n$$

e

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} = \frac{1}{r_e^n} \cdot \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}$$

e, portanto, a equação diferencial de (28-I) se reescreve na forma

$$D\nabla_\rho^4 w - N_r(\rho) r_e^2 \nabla_\rho^2 w + \gamma h r_e^4 \ddot{w} - r_e^4 q(\rho) = 0$$

enquanto que as condições de contorno passam a ser

$$\nabla_\rho^2 w = \frac{1-\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \nabla_\rho^2 w}{\partial \rho} = \frac{N_r(\rho)}{D} \cdot \frac{\partial w}{\partial \rho} \quad (\text{No contorno}).$$

Nestas expressões,  $N_r$  e  $q$  passam a ser expressos como funções de  $\rho$ , e os símbolos  $\nabla_\rho^4 w$  e  $\nabla_\rho^2 w$  indicam que estes

operadores são, também, expressos em função da variável  $\rho$ .

Supondo, finalmente, a possibilidade de se encontrar uma solução com variáveis separadas,

$$w(\rho, t) = W(\rho) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (29-I)$$

onde  $\omega$  é a frequência de vibração da placa, para a qual

$$\ddot{w}(\rho, t) = -\omega^2 w(\rho, t),$$

vem, após descartarmos o fator comum  $e^{-i\omega t}$ ,

$$D \nabla_{\rho}^4 W - N(\rho) r_e^2 \nabla_{\rho}^2 W - \gamma h r_e^4 \omega^2 W - r_e^4 q(\rho) = 0$$

ou, deixando de usar, nos operadores, o índice  $\rho$ , como, de resto, faremos nos capítulos seguintes, e dividindo ambos os membros da equação diferencial por  $D$ , obtemos finalmente:

$$\boxed{\nabla^4 W - \frac{N}{D} r_e^2 \nabla^2 W - \gamma \frac{h}{D} r_e^4 \omega^2 W - r_e^4 \frac{q}{D} = 0} \quad (30-I)$$

É com esta equação que trabalharemos nos próximos capítulos. A mudança de variável permitiu, como já se disse, adimensionalizar a variável livre, o que equivale a se resolver o problema como se o raio da placa fôsse unitário.

CAPÍTULO II - PLACA CIRCULAR APOIADA EM SUA PERIFERIA, E UNIFORMEMENTE COMPRIMIDA AO LONGO DA MESMA

Vamos resolver, agora, empregando a equação diferencial instituída no capítulo anterior, na sua forma (30-I), o caso de uma placa circular de espessura uniforme, sem furos, uniformemente comprimida em sua periferia, e apoiada ao longo da mesma (fig. VI). Devido à possibilidade de se conseguir, neste caso, uma solução analítica, obteremos importantes subsídios que servirão de elementos orientativos no caso abordado a seguir.

Levando em conta que, devido à inexistência de carregamento transversal,

$$q(\rho) = 0 ,$$

e que a força produzida pelo carregamento lateral uniforme se exprime por

$$N_r = - p_o \cdot h ,$$

podemos reescrever a equação diferencial na forma

$$\nabla^4 W + \frac{p_o h r^2}{D} \cdot \nabla^2 W - \frac{\gamma h r^4}{D} \cdot \omega^2 W = 0 \quad (1-II)$$

com as condições de contorno

a)  $W(0)$  finito;

b)  $M_r(0) = M_\theta(0)$ ;

c)  $W(1) = 0$ ;

d)  $M_r(1) = 0$  ;

(2-II)

e com as condições iniciais  $f(\rho)$  e  $g(\rho)$ , no sentido dado nas

equações (27-I). Pondo

$$A = \frac{p_0^{hr} e^2}{2D} \quad e \quad B = \frac{\gamma^{hr} e^4}{D}, \quad (3-II)$$

ficamos com

$$\nabla^4 W + 2A\nabla^2 W - B\omega^2 W = 0, \quad (4-II)$$

que é uma equação diferencial linear, ordinária, onde A e B são constantes positivas, e cuja equação característica é

$$u^2 + 2Au - B\omega^2 = 0,$$

que tem raízes

$$\begin{aligned} -\alpha &= -A - \sqrt{A^2 + B\omega^2} \\ \beta &= -A + \sqrt{A^2 + B\omega^2} \end{aligned} \quad (5-II)$$

Observamos que, na forma posta,  $\alpha$  e  $\beta$  são positivos. A equação pode, então, ser reescrita na forma

$$(\nabla^2 + \alpha) [(\nabla^2 - \beta)W] = 0$$

e, portanto, pode ser desdobrada no sistema

$$(\nabla^2 + \alpha)Z = 0$$

$$(\nabla^2 - \beta)W = Z$$

ou, de outra forma,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho} + \alpha Z &= 0 \\ \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dW}{d\rho} - \beta W &= Z. \end{aligned} \quad (6-II)$$

Da primeira das equações de (6-II) vem que

$$Z = C_1 J_0(\sqrt{\alpha}\rho) + C_2 Y_0(\sqrt{\alpha}\rho),$$



e levando êste resultado à segunda equação, resulta

$$W = K_1 I_0(\sqrt{\beta} \rho) + K_2 K_0(\sqrt{\beta} \rho) + K_3 J_0(\sqrt{\alpha} \rho) + K_4 Y_0(\sqrt{\alpha} \rho),$$

onde as duas primeiras parcelas representam a solução da equação homogênea, enquanto que as outras duas constituem uma solução particular da equação não homogênea.

Pela condição (a), de (2-II), há que impor  $K_2 = K_4$  nulos, resultando, então, pela condição (c),

$$K_3 = -K_1 \cdot \frac{I_0(\sqrt{\beta})}{J_0(\sqrt{\alpha})},$$

com o que a solução fica sendo

$$W = K_1 \left[ I_0(\sqrt{\beta} \rho) - \frac{I_0(\sqrt{\beta})}{J_0(\sqrt{\alpha})} \cdot J_0(\sqrt{\alpha} \rho) \right],$$

portanto

$$W' = K_1 \left[ \sqrt{\beta} I_1(\sqrt{\beta} \rho) + \sqrt{\alpha} \frac{I_0(\sqrt{\beta})}{J_0(\sqrt{\alpha})} \cdot J_1(\sqrt{\alpha} \rho) \right]$$

$$e$$

$$W'' = K_1 \left\{ \beta I_0(\sqrt{\beta} \rho) - \frac{\sqrt{\beta}}{\rho} \cdot I_1(\sqrt{\beta} \rho) + \frac{I_0(\sqrt{\beta})}{J_0(\sqrt{\alpha})} \left[ \alpha J_0(\sqrt{\alpha} \rho) - \frac{\sqrt{\alpha}}{\rho} \cdot J_1(\sqrt{\alpha} \rho) \right] \right\}$$

A condição (b) é equivalente a escrever-se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} W''(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{W'(\rho)}{\rho}$$

e, em nosso caso, constata-se que êsses limites são iguais a

$$\frac{K_1}{2} \left[ \beta + \alpha \cdot \frac{I_0(\sqrt{\beta})}{J_0(\sqrt{\alpha})} \right]$$

sendo, portanto, satisfeita a condição.

Sendo

$$M_r = -Dr_e^2 \left[ \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \right],$$

a condição (d) pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \bigg|_{\rho=1} = 0 ,$$

ou seja, em nosso caso, após divisão por  $K_1 I_0(\sqrt{\beta})$ ,

$$\alpha + \beta - (1 - \nu) \left[ \sqrt{\alpha} \cdot \frac{J_1(\sqrt{\alpha})}{J_0(\sqrt{\alpha})} + \sqrt{\beta} \cdot \frac{I_1(\sqrt{\beta})}{I_0(\sqrt{\beta})} \right] = 0 \quad (7-II)$$

Esta equação vai fornecer os autovalores do problema. Vemos, pelas relações (5-II), que  $\alpha$  e  $\beta$  dependem da frequência, cabendo, pois, pesquisar os valores de  $\omega$  para os quais é satisfeita a (7-II). Denotando por  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , êsses valores, então,

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left[ I_0(\sqrt{\beta_i} \rho) - \frac{I_0(\sqrt{\beta_i})}{J_0(\sqrt{\alpha_i})} \cdot J_0(\sqrt{\alpha_i} \rho) \right] ,$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  correspondentes à frequência  $\omega_i$ , respectivamente, sendo dados pelas relações (5-II).

$C_i$  são constantes a determinar.

Já que as expressões de  $\alpha$  e  $\beta$  envolvem, também, a constante  $A$ , definida em (4-II), que tem a carga radial  $p_0$  como um de seus fatores, estabelece-se, na (7-II), uma interrelação entre a carga aplicada e as frequências de vibração do sistema, e essa equação vai servir, portanto, para a determinação da carga de instabilidade. Operando, por exemplo, com o processo da "regula falsa", num caso em que

$$A = 2p_0 \quad \text{e} \quad B = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2 ,$$

e fazendo-se os cálculos a mão, foram obtidos, para a primeira frequência, os resultados apresentados no Diagrama I. Como se observa, o comportamento é similar ao que ocorre no caso de barras comprimidas.

### CAPÍTULO III - VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR,

COM FURO, ENGASTADA NUM EIXO, E UNIFORMEMENTE COM-

PRIMIDA AO LONGO DA PERIFERIA

#### A - Introdução

Retomando a equação diferencial (30-I), consideremos agora o caso de uma placa circular, de espessura uniforme, com furo, engastada num eixo, e uniformemente comprimida ao longo da periferia, conforme a fig. VII.

Considerando a inexistência de carregamento transversal, e que a força produzida pelo carregamento lateral uniforme se exprime, agora, por

$$N_r = - \frac{p_o h}{1 - \rho_o^2} \left( 1 - \frac{\rho_o^2}{\rho^2} \right), \quad (1-III)$$

onde  $\rho_o$  é a relação entre o raio do eixo e o raio externo da placa, podemos escrever a equação diferencial na forma

$$\nabla^4 W + \frac{p_o h r_e^2}{D(1 - \rho_o^2)} \left( 1 - \frac{\rho_o^2}{\rho^2} \right) \nabla^2 W - \frac{\gamma h r_e^4}{D} \omega^2 W = 0 \quad (2-III)$$

com as condições de contorno

- a)  $W(\rho_o) = 0;$
  - b)  $W'(\rho_o) = 0;$
  - c)  $M_r(1) = 0;$
  - d)  $Q_r(1) = 0,$
- (3-III)

onde  $M_r$  e  $Q_r$  representam, respectivamente, o momento fletor e

o esforço cortante radiais, na placa.

A solução analítica da equação (2-III) é complexíssima, e por isso mesmo, inviável. É tentada, por isso, a solução numérica, por intermédio do computador digital IBM 1130 do Departamento de Cálculo Científico da COPPE. Para orientar este trabalho, é feita, anteriormente, uma análise da primeira frequência de vibração do sistema, em função de  $\rho_0$ , num caso particular, por intermédio do método de Ritz, afim de oferecer elementos orientativos para o trabalho que se seguirá.

#### B- Frequências, pelo Método de Rayleigh-Ritz

Para obter a primeira frequência de vibrações do sistema, vamos considerar como solução aproximada a função

$$W_0 = a(\rho^2 - \rho_0^2)^2 \quad (4-III)$$

onde  $a$  é uma constante. Esta função não é solução da equação diferencial e, mesmo, deixa de satisfazer a duas das condições de contorno. Igualmente torna-se impossível obter relações adicionais, a impor em substituição às condições de contorno não respeitadas. Nestas condições, o resultado que for obtido não estará em boa concordância com a primeira frequência real do sistema. Podemos, porém, afirmar que o resultado obtido é um majorante daquela frequência, e isso servirá para nos definir uma ordem de grandeza, um ponto de partida, a baixo do qual se testarão valores de frequência, quando se pretender resolver a equação diferencial.

Evidentemente, a razão de não se testar uma função que satisfaça mais requisitos, oferecendo, assim, um resulta

do mais acurado, está na complexidade que o problema assumiria.

Tomando as expressões das energias obtidas no Cap. I, equações (3-I), (4-I), (8-I) e (10-I), e particularizando-as para os casos axi-simétricos de vibração, temos, considerando, novamente, que a solução seja do tipo da equação (29-I),

$$\begin{aligned}
 V_f &= \pi e^{-i\omega t} D \int_{\rho_0}^1 \left[ (V^2 W)^2 - 2(1 - \nu) \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dr} \cdot \frac{d^2 W}{dr^2} \right] dr \\
 V_t &= \frac{\pi}{hE} \int_{\rho_0}^1 \left[ (N_r + N_\theta)^2 + 2(1 + \nu)(N_{r\theta}^2 - N_r N_\theta) \right] dr \\
 V_\ell &= \pi e^{-i\omega t} \int_{\rho_0}^1 N_r \frac{dW}{dr}^2 dr + \\
 &\quad + 2 \int_{\rho_0}^1 \left[ N_r \cdot \frac{du}{dr} + N_\theta \cdot \frac{u}{r} + N_{r\theta} \left( \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \right] dr \\
 T &= -\pi e^{-i\omega t} \gamma h \omega^2 \int_{\rho_0}^1 W^2 dr
 \end{aligned}$$

Limitando-nos, como já foi reiterado, às pequenas deformações, podemos desprezar  $V_t$  e a segunda parcela de  $V_\ell$ , e, por consequência, escrever, em termos da variável  $\rho$ , considerando, já, a expressão (1-III):

$$\begin{aligned}
 V_f &= \frac{\pi D e^{-i\omega t}}{r_e^2} \int_{\rho_0}^1 \left[ \left( \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \right)^2 - 2(1 - \nu) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dW}{d\rho} \cdot \frac{d^2 W}{d\rho^2} \right] \rho d\rho \\
 V_\ell &= -\pi e^{-i\omega t} \int_{\rho_0}^1 \frac{\rho_0 h}{1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}} \left( 1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{dW}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho \\
 T &= -\pi e^{-i\omega t} \cdot h \omega^2 r_e^2 \int_{\rho_0}^1 W^2 \rho d\rho
 \end{aligned}$$

A frequência pode ser escrita, então, na forma

$$\omega^2 = \frac{1}{\gamma h r_e^2 \int_{\rho_0}^1 w^2 \rho d\rho} \left\{ - \frac{p_0 h}{1 - \rho_0^2} \int_{\rho_0}^1 \left( 1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{dw}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho + \right. \\ \left. + \frac{D}{r_e^2} \int_{\rho_0}^1 \left[ \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\rho} \cdot \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right] \rho d\rho \right\}$$

Derivando a função (4-III) duas v $\acute{e}$ zes, e introduzindo os resultados obtidos nas integrais que comparecem na equa $\tilde{c}$ ão acima, obtemos

$$\int_{\rho_0}^1 \left( 1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{dw}{d\rho} \right)^2 \rho d\rho = 2a^2 (1 - \rho_0^2)^4 \\ \int_{\rho_0}^1 \left[ \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\rho} \cdot \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{dw}{d\rho} \right)^2 \right] \rho d\rho = \\ 32a^2 \left[ \frac{1}{3} (1 - \rho_0^6) + \frac{1}{2} (1 - \rho_0^2)^2 (1 + \nu) \right] \\ \int_{\rho_0}^1 w^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{10} (1 - \rho_0^2)^5,$$

donde, ent $\tilde{a}$ o, finalmente, pon $\tilde{d}$ o  $\beta = \frac{r_e}{h}$ , vem, ap $\acute{o}$ s as simplifica $\tilde{c}$ oes poss $\acute{i}$ veis:

$$\omega^2 = \frac{10}{\gamma r_e^2} \cdot \frac{1}{(1 - \rho_0^2)^2} \left[ \frac{2}{9} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2) \beta^2} \left( 1 + \frac{3\nu}{1 - \rho_0^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{(1 - \rho_0^2)^2} + \frac{1}{(1 - \rho_0^2)^3} \right) - p_0 \right].$$

A carga de instabilidade, nestas condi $\tilde{c}$ oes, expressar-se-ia por

$$p_{\text{inst}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{E}{(1 - \nu^2) \beta^2} \left[ 1 + \frac{3\nu}{1 - \rho_0^2} + \frac{3}{(1 - \rho_0^2)^2} + \frac{1}{(1 - \rho_0^2)^3} \right].$$

Particularizando, ent $\tilde{a}$ o, para uma placa de a $\tilde{c}$ o, quando, ent $\tilde{a}$ o,

$$\begin{aligned} E &= 2100 \text{ kg/mm}^2 & \nu &= 0,3 \\ \gamma &= 0,796 \cdot 10^{-9} \text{ kg.s}^2/\text{mm}^4 \end{aligned} \quad (5\text{-III})$$

num caso em que

$$\begin{aligned} r_e &= 500 \text{ mm} & \beta &= 20 \\ p_o &= 1 \text{ kg/mm}^2, \end{aligned} \quad (6\text{-III})$$

obtemos

$$\omega^2 = \frac{50251,25628}{(1 - \rho_o^2)^2} \left[ 1,282205 \left( 1 + \frac{0,9}{1 - \rho_o^2} + \frac{3}{(1 - \rho_o^2)^2} + \frac{1}{(1 - \rho_o^2)^3} \right) - 1 \right]$$

Para se conhecer o comportamento de  $\omega$  em função de  $\rho_o$ , foi elaborado, então, um programa para o computador. Este programa está apresentado no Anexo II, e os resultados obtidos estão contidos na Tabela I e no Diagrama II (curva em linha cheia). Verifica-se que, de acordo com a expectativa, a primeira frequência de vibração do sistema é tanto mais alta quanto maior for  $\rho_o$ .

### C - Solução Numérica - Generalidades

Para a solução numérica da equação diferencial, restringimo-nos, também, ao caso particular representado pelos dados de (5-III) e (6-III), donde os coeficientes da equação diferencial (2-III) passam a ser

$$\frac{p_o \text{ hr}_e^2}{D} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E} \cdot p_o \beta^2 = 2,08$$

$$\frac{\gamma \text{ hr}_e^4}{D} = \frac{12(1 - \nu^2)}{E} \cdot \gamma \beta^2 r_e^4 = 4,1392 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2$$

e a equação diferencial passa a ser

$$\nabla^4 W + \frac{2,08}{1 - \rho_0^2} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) \nabla^2 W - 4,1392 \cdot 10^{-4} \omega^2 W = 0$$

Esta equação será resolvida, a seguir, para as duas primeiras frequências de vibração do sistema, nos casos em que  $\rho_0$  vale 0,2, 0,3 e 0,4. Será, assim, estudada a influência desse parâmetro do problema. A descrição da técnica empregada será feita tomando-se o caso em que  $\rho_0 = 0,4$ , dando-se dos outros dois casos apenas os resultados. A equação diferencial, em cada caso, fica:

$$\rho_0 = 0,4: \frac{d^4 W}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d^3 W}{d\rho^3} + \left(2,47619 - \frac{1,39619}{\rho^2}\right) \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(2,47619 + \frac{0,60381}{\rho^2}\right) \frac{dW}{d\rho} - 4,1392 \cdot 10^{-4} \omega^2 W = 0$$

$$\rho_0 = 0,3: \frac{d^4 W}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d^3 W}{d\rho^3} + \left(2,28571 - \frac{1,20571}{\rho^2}\right) \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(2,28571 + \frac{0,79429}{\rho^2}\right) \frac{dW}{d\rho} - 4,1392 \cdot 10^{-4} \omega^2 W = 0$$

$$\rho_0 = 0,2: \frac{d^4 W}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d^3 W}{d\rho^3} + \left(2,16667 - \frac{1,08667}{\rho^2}\right) \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(2,16667 + \frac{0,91333}{\rho^2}\right) \frac{dW}{d\rho} - 4,1392 \cdot 10^{-4} \omega^2 W = 0 \quad (7-III)$$

#### D - Solução Numérica - Descrição

A equação diferencial, na forma (7-III), foi resolvida no computador digital, empregando-se a sub-rotina RK3, da Biblioteca de Sub-Programas do DCC da COPPE, a qual permite resolver equações diferenciais de até sexta ordem, ou sis



temas de primeira ordem, com até seis equações, pelo processo de Runge-Kutta.

A aplicação do processo de Runge-Kutta é bastante expedita quando se têm tôdas as condições de contorno especificadas num mesmo ponto, a partir do qual se procede a resolução numérica da equação. Tal não ocorre no caso em estudo, de vez que, pelo que se observa em (3-III), temos duas condições de contorno em cada extremidade do intervalo de integração.

Para se contornar o problema, a solução consiste em arbitrar valores para as duas condições desconhecidas, numa das extremidades, resolver a equação por Runge-Kutta, e verificar se foram confirmadas as condições disponíveis na segunda extremidade do intervalo de integração. Caso tal não tenha ocorrido, rearbitram-se as condições na primeira extremidade, e repete-se o processo. Existe um algoritmo matemático que permite obter rapidamente a convergência aos valores que satisfazem ao problema.

No caso em foco, porém, o problema se torna mais complexo, de vez que existe um outro parâmetro, a frequência, cujo valor é, "a priori", desconhecido, e que precisa ser determinado juntamente com as duas condições de extremidade. Um processo iterativo similar ao descrito acima torna-se muito tedioso e, eventualmente, impraticável.

Chamando, doravante,

$M_e$  - Momento fletor radial no engaste entre placa e eixo;

$Q_e$  - Esforço cortante no engaste;

$M_b$  - Momento fletor radial na borda livre da placa;

$Q_b$  - Esforço cortante na borda livre da placa,

vamos descrever, então, o processo adotado para a resolução do problema.

Foi tentada a aplicação do algoritmo mencionado acima, arbitrando-se  $M_e$ ,  $Q_e$  e  $\omega$ , e procurando-se obter, ao final do processo de integração,  $M_b$  e  $Q_b$  nulos. Os resultados obtidos, que deixam de ser anexados ao presente trabalho, devido ao seu escasso valor, trouxeram, como único saldo positivo, a verificação, aliás compreensível, de que a relação

$$\eta = \frac{M_e}{Q_e}$$

é, também, um parâmetro do problema. Isto é: mantendo-se  $\eta$  constante, o que equivale a fazer variar  $M_e$  e  $Q_e$  numa mesma proporção, constata-se que  $M_b$  e  $Q_b$  variam nesta mesma proporção. Nestas condições, é possível fixar um valor para  $M_e$  ou  $Q_e$ , e trabalhar variando-se apenas  $\eta$  e  $\omega$ . Obtido um par  $(\eta, \omega)$  que satisfaça ao problema, para o valor arbitrado de  $M_e$  ou  $Q_e$ , este par irá, também, satisfazer o problema para qualquer outro valor que se atribua a essa grandeza, desde que não se varie  $\eta$ . Isto é: mantido  $\eta$  constante, não se altera o modo de vibração, mas apenas as intensidades dos resultados.

Em vista disso, passou-se a trabalhar, e até o final dêste trabalho, com

$$Q_e = - D r_e^3$$

o que equivale a fixar

$$\frac{d^3W}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d^2W}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{dW}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = 1 ,$$

e passou-se a variar, exclusivamente,  $M_e$ , vale dizer,  $\eta$ , bem como, evidentemente, a frequência. A partir daí, então, o problema se resume em determinar o par  $(\eta, \omega)$  para o qual se tenha  $M_b$  e  $Q_b$  nulos.

Nestas condições, preparou-se, para o computador, o programa do Anexo III, em que se faz variar o parâmetro  $\eta$  e a frequência  $\omega$ , e se pesquisa o momento radial e o esforço cortante na borda, possibilitando traçar-se, para cada  $\eta$ , a curva de variação destas grandezas com a frequência. Este programa foi usado sucessivas vezes, alterando-se, de cada vez, os cartões de dados.

Dispondo-se das curvas obtidas como descrito acima, tornava-se possível determinar, graficamente, com razoável precisão, a frequência em que, para cada  $\eta$ , se anulava o cortante na borda, e avaliar, também, o correspondente valor do momento fletor na borda da placa. Essa técnica está ilustrada no Diagrama III e seguintes, onde, para clareza do desenho, se omitiram as porções das curvas de  $M_b$  e  $Q_b$  que não apresentavam interesse. A Tabela II é uma amostra das que foram obtidas usando-se o programa do Anexo III, e que serviram de base para o traçado destas curvas.

As diversas ordenadas de  $M_b$  mencionadas, correspondentes aos zeros de  $Q_b$ , e correspondentes aos diversos valores de  $\eta$ , permitiram traçar uma curva contínua, que corta o eixo das frequências em um certo ponto. Essa curva será doravante chamada de INDICATRIZ, de vez que fornecerá os pares  $(\eta, \omega)$  que constituem as soluções para nosso problema, como se verá

a seguir.

Levando em conta as condições em que foi obtida a indicatriz, podemos concluir que o ponto em que a mesma corta o eixo das frequências corresponde a uma frequência e a um valor de  $\eta$  para os quais, simultaneamente, se tem  $M_b = 0$  e  $Q_b = 0$ . A frequência pode ser lida no desenho, e o valor correspondente de  $\eta$  pode ser obtido por interpolação entre os pontos correspondentes a valores conhecidos de  $\eta$  sobre a indicatriz. Essa interpolação é praticamente linear, mormente quando se testam menores intervalos de frequência, e valores de  $\eta$  mais próximos entre si.

Nestas condições, o par  $(\eta_1, \omega_1)$  obtido no Diagrama III, e que foi refinado nos dois diagramas seguintes, corresponde ao primeiro modo de vibração da placa. O resultado obtido com três aproximações foi considerado satisfatório. A mesma técnica foi empregada para a obtenção da segunda frequência de vibração, e do correspondente valor de  $\eta$ , conforme se observa no Diagrama VI, ainda para  $\rho_0 = 0,4$

Os Diagramas VII e VIII correspondem à obtenção, respectivamente, da primeira e segunda frequências de vibração, no caso em que  $\rho_0 = 0,3$ , e os Diagramas IX e X correspondem ao caso em que  $\rho_0 = 0,2$ . Esses diagramas foram originalmente traçados em escala ampliada, para efeitos de interpolação. Por conveniência, foram anexados em escala reduzida.

Em tese, o processo pode ser estendido para a obtenção das frequências seguintes. Um problema, porém, vai ocor-

rer, e tornar o processo cada vez mais moroso. É que, ao se testarem frequências mais elevadas, teremos:

a) Variações mais bruscas de  $M_b$  e  $Q_b$ , para cada  $\eta$ , em função de  $\omega$ , na zona em que os mesmos se anulam; as curvas obtidas, são, então, bastante íngremes, mesmo quando se amplia consideravelmente a escala horizontal (das frequências), e escapam rapidamente ao limite físico que se dispõe para seu traçado.

b) Contrariamente, ordenadas cada vez mais amortecidas da curva indicatriz.

Estabelece-se, assim, um paradoxo: deve-se obter a curva indicatriz, que amortece rapidamente, a partir de curvas de  $M_b$ , de variação cada vez mais brusca. Para se ter ordenadas da indicatriz numa escala mensurável, há que ampliar consideravelmente a escala vertical. Com isso, e face ao que foi mencionado em a), a curva de  $M_b$  escapa rapidamente aos limites do desenho, e se torna impraticável o seu traçado. Afim de se obter um resultado aceitável, deve-se testar, então, para cada  $\eta$ , um intervalo bastante reduzido de frequência, no qual não seja muito acentuada a variação de  $M_b$ . Entretanto, este pequeno intervalo de frequência deve conter o zero de  $Q_b$ , ou estar próximo do mesmo, de modo que deve ser determinado de antemão, para cada  $\eta$ . O programa do Anexo III torna-se, partindo daí, inviável, e deve ser substituído por outro, mais amplo, que, para cada  $\eta$ , procure, inicialmente, a frequência para a qual se anula  $Q_b$ , e, a seguir, analise esta região nos termos em que o faz o programa mencionado.

Este trabalho foi tentado, mas deixou de ser concluído, ao se constatarem êsses fatos, face à elevada demanda que sofria, à época, o computador. O Diagrama XI ilustra alguns dos resultados obtidos, ao se pesquisar a terceira frequência de vibração, no caso em que  $\rho_0 = 0,4$ . Em verdade, os fatos mencionados já se faziam sentir, ao se determinar a segunda frequência de vibração do sistema, se bem que com menor intensidade.

Os valores da frequência obtidos na forma descrita, foram levados, para efeito de comparação, ao Diagrama I, onde são representados em linha tracejada. Observa-se que as frequências reais são bem menores do que as obtidas pelo método de Rayleigh-Ritz:

$\rho_0$	Frequências por Ritz	Frequências computadas	Erro (%)
0,4	812,56	704,70	~ 15
0,3	692,25	513,76	~ 35
0,2	622,52	389,33	~ 60

Este resultado não nos surpreende, tendo em vista os comentários já feitos quando se falou sobre o método de Rayleigh-Ritz. Verifica-se, porém, que para grandes valores de  $\rho_0$ , o erro cometido tende a cair violentamente.

#### E - Solução da Equação Diferencial

Obtidos, pois, os valores de  $\eta_1, \omega_1$  e  $\eta_2, \omega_2$  correspondentes a cada valor de  $\rho_0$ , elaborou-se o programa apresentado no Anexo IV, tendo em vista a resolução da equação diferencial. Os resultados obtidos estão contidos nas Tabe-

las III, IV e V, correspondentes, respectivamente, a  $\rho_0 = 0,4$ ,  $0,3$  e  $0,2$ . Com os elementos contidos nessas Tabelas foram traçados, respectivamente, os Diagramas XII, XIII e XIV, que nos ilustram os modos de vibração.

#### F - Considerações

Pelo que se observa nos diagramas XII a XIV, há um aparente paradoxo no que concerne aos modos de vibração da placa. Com efeito, o primeiro modo de vibração, por exemplo, apresenta um nó, isto é, um ponto que não sofre deslocamento, cuja posição varia de acôrdo com  $\rho_0$ , entre  $\rho = 0,80$  e  $0,85$ , nos casos analisados. Isto faz presumir, por analogia ao que ocorre com as vibrações de barras, que se trate, já, do segundo modo de vibração.

Para dirimir esta dúvida, e exclusivamente para o caso em que  $\rho_0 = 0,4$ , foram feitos testes para freqüências compreendidas entre 5 rad/seg e a primeira freqüência determinada, 704,7 rad/seg. O que se constatou, porém, é que a curva indicatriz se mantém com ordenadas positivas, tendendo a anular-se apenas para  $\omega = 0$ , o que corresponde, evidentemente, à solução trivial, que não nos interessa. Alguns dos resultados obtidos foram consignados no Diagrama III, ilustrando a situação.

Uma outra indicação de que 704,7 rad/seg deve, efetivamente, ser a primeira freqüência de vibração do sistema, está dada pela informação que se obteve através do método de Rayleigh-Ritz.

Observa-se, também, que a variação de  $\rho_0$  influi pouco sobre as amplitudes de vibração, ocorrendo o contrário em relação à rotação das secções, que é tanto mais acentuada, quanto menor fôr  $\rho_0$ . Um outro aparente paradoxo é dado pelo deslocamento máximo, que cresce quando se passa de  $\rho_0 = 0,4$  para  $\rho_0 = 0,3$ , mas cái, e bastante, para  $\rho_0 = 0,2$ , quando o esperado seria que continuasse crescendo.

Em qualquer dos casos, o momento fletor máximo ocorre no engaste, caindo o valor dêste máximo com  $\rho_0$ . Em decorrência, tódã a curva de momentos fletores se torna menos acentuada para menores valores de  $\rho_0$ . Considerações idênticas cabem no que concerne ao esforço cortante, com a observação de que, nêste caso, para menores valores de  $\rho_0$ , o esforço cortante cái mais rapidamente, em função de  $\rho$ , a partir de seu valor máximo.

Quanto ao segundo modo de vibração, apresenta dois nós, decorrência mais ou menos lógica, a partir do instante em que se aceita o primeiro modo encontrado como correto. Quanto ao mais, os resultados mereceriam considerações análogas às feitas acima, com a ressalva de que, nêste caso, os valores numéricos são inferiores, em valor absoluto, aos seus correspondentes do primeiro modo, o que é natural.



## C O N C L U S ã O

O presente trabalho é incompleto. O assunto está longe de ser exgotado. Entretanto, mais não foi possível fazer no curto espaço de tempo de que se dispunham pouco mais de cem dias, mórmente considerando-se, ainda, as limitações impostas pela alta demanda do computador, ferramenta indispensável a êste estudo.

Como sugestões para necessárias continuações, apresentamos:

- a) Extensão do presente trabalho para novos valores de  $p_0$ ;
- b) Estudo de um método mais expedito para a obtenção da curva indicatriz, mórmente para as regiões de altas frequências;
- c) Estudo da influência de  $p_0$ . O presente estudo, no seu Cap. III se limitou à carga de  $1 \text{ kg/mm}^2$ , mas seria desejável uma extensão, tendo em vista obter-se informações quanto à carga de instabilidade;
- d) Estudo de um caso similar ao do Cap. III, porém supondo o sistema em movimento de rotação. Nêsse caso surgirá uma parcela adicional de energia, a considerar na instituição da equação diferencial, que será similar à (2-III), porém com segundo membro;
- e) Extensão a casos não axi-simétricos;
- f) Estudo do efeito de carregamento transversal sem simetria axial.

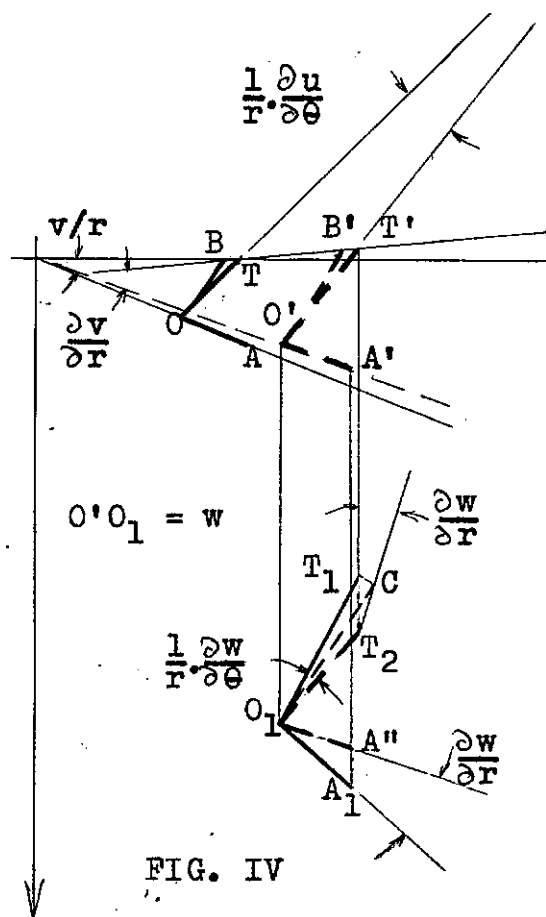
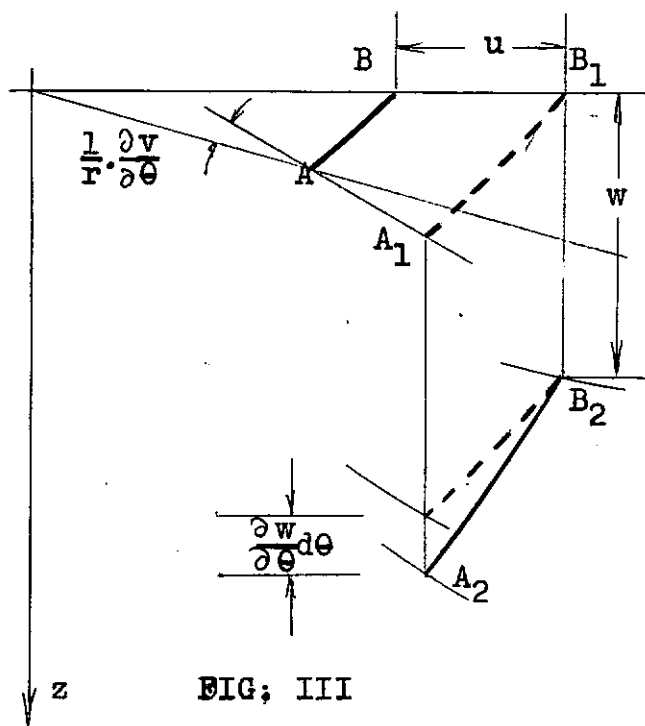
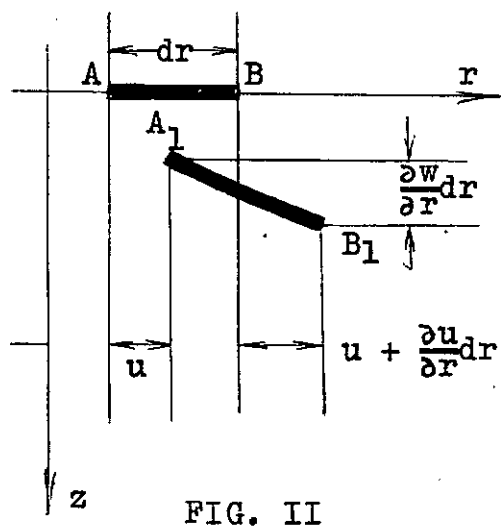
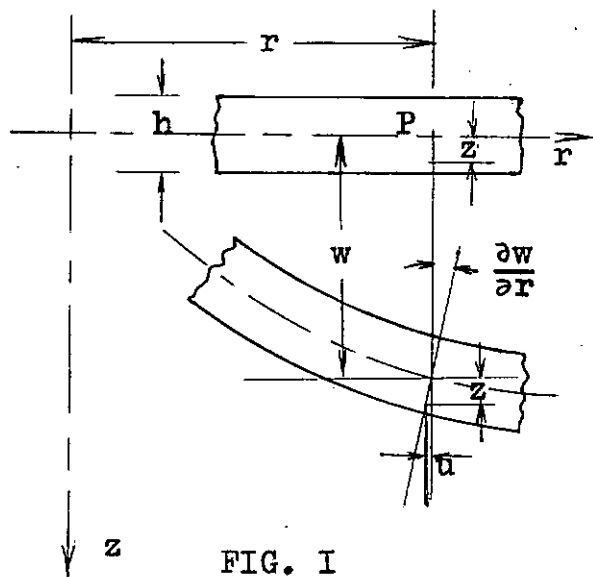
O saldo positivo apresentado por êste trabalho está, a nosso ver, no estabelecimento da curva indicatriz, que poderá, em muitos casos, ser um instrumento expedito para a determinação das frequências de vibração de sistemas contínuos, com aplicação, eventualmente, mais simples do que o método de Ritz-Galerkin.

BIBLIOGRAFIA

1. Nowacki, W. - Dynamics of Elastic Systems - Chapman & Hall, 1963
2. Girkmann, K. - Flächentragwerke - Springer, 1963
3. Timoshenko & Woinowski-Krieger - Theory of Plates and Shells - McGraw-Hill, 1959
4. Timoshenko & Gere - Theory of Elastic Stability - McGraw-Hill, 1961
5. Timoshenko & Goodier - Theory of Elasticity - McGraw-Hill, 1951
6. Timoshenko - Vibration Problems in Engineering - Van Nostrand, 1937
7. Leipholz, H. - Über die Wahl der Ansatzfunktionen bei der Durchführung des Verfahrens von Galerkin - Acta Mechanica, Vol. III, No. 3, pgs. 295-317 (1967)
8. Meirovitch, L. - Analytical Methods in Vibration - Macmillan, 1967
9. Collatz, L. - Numerische Behandlung von Differentialgleichungen - Springer, 1955
10. Hildebrand - Introduction to Numerical Analysis - McGraw-Hill, 1956
11. McLachlan - Bessel Function for Engineers - Oxford Univ. Press, 1961

N O M E N C L A T U R A

- $\delta A$  - Variação do trabalho das forças externas;  
 $D$  - Rigidez à flexão das placas  
 $E$  - Módulo de elasticidade do material da placa;  
 $h$  - Espessura da placa;  
 $K$  - Energia cinética;  
 $M_r, M_e, M_b$  - Momento fletor radial (genérico, no engaste e na borda da placa);  
 $Q_r, Q_e, Q_b$  - Esforço cortante radial (genérico, no engaste e na borda da placa);  
 $N_r, N_e, N_{re}$  - Forças distribuídas;  
 $P_o$  - Carga radial aplicada à placa;  
 $q$  - Carga transversal atuando sobre a placa;  
 $r_e$  - Raio exterior da placa circular;  
 $u, v$  - Deslocamentos radial e tangencial de um ponto da placa;  
 $V$  - Energia de deformação da placa;  
 $V_f, V_t, V$  - Componentes da energia de deformação;  
 $w, W$  - Deslocamento transversal de um ponto da placa;  
 $W_o$  - Função testada pelo método de Rayleigh-Ritz;  
 $\beta$  - Relação entre as dimensões da placa;  
 $\gamma$  - Massa específica do material da placa;  
 $\epsilon_r, \epsilon_e, \epsilon_{re}$  - Componentes de deformação;  
 $\sigma_r, \sigma_e, \tau_{re}$  - Tensões num ponto da placa;  
 $\eta$  - Relação de engaste;  
 $\nu$  - Módulo de Poisson;  
 $\rho$  - Variável adimensional (Raio);  
 $\rho_o$  - Valor dessa variável no engaste;  
 $\omega, \omega_1$  - Frequências de vibração da placa.



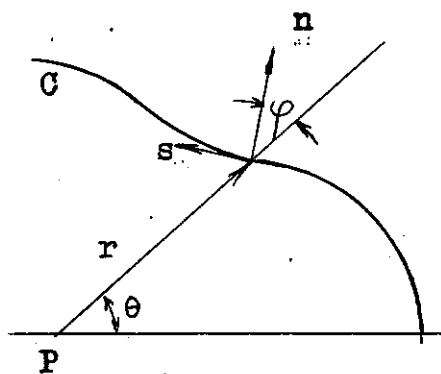


FIG. V

FIG. VII

$$r_e: \rho = 1; r_i: \rho = \rho_0$$

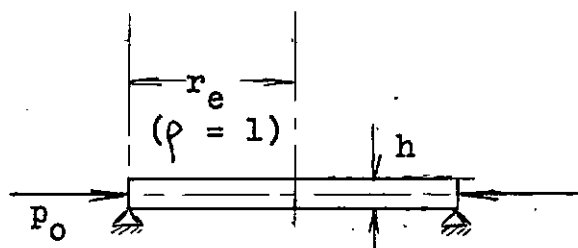
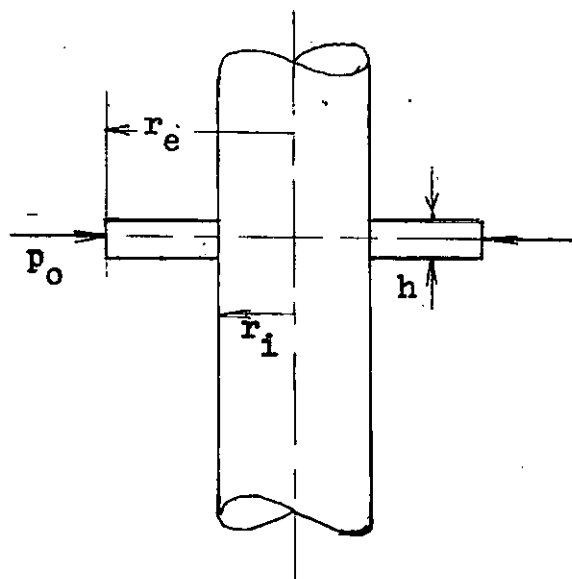


FIG. VI





ANEXOS II E III

```

C  VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR DE ESPESSURA UNIFORME
C  UNIFORMEMENTE COMPRIMIDA AO LONGO DA PERIFERIA
C  PRIMEIRA FREQUENCIA DE VIBRACAO DO SISTEMA PELO METODO DE RITZ
C  ARNO BLASS - C O P P E - 18/01/68
    WRITE(3,10)
10  FORMAT(//'/VIBRACOES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR'/)
    WRITE(3,20)
20  FORMAT('/PRIMEIRA FREQUENCIA, OBTIDA PELO METODO DE RITZ')
    WRITE(3,30)
30  FORMAT(//'/RAIO ADIMENSIONALIZADO = RAIO GENERICO / RAIO EXTERNO')
    WRITE(3,40)
40  FORMAT(//'/RAIO ADIMENSIONALIZADO          FREQUENCIA (RADS/SEG)')
    RONUL=1.
50  RONUL=RONUL-0.05
    PSI=1.-RONUL**2
    DELTA=(50251.25628/PSI**2)*(-1.+1.282205*(1.+0.9/PSI+3./PSI**2+1./
1PSI**3))
    OMEGA=SQRT(DELTA)
    WRITE(3,60)RONUL,OMEGA
60  FORMAT(F15.2,F33.3)
    IF(RONUL)70,50,50
70  CALL EXIT
    END

```

```

C  VIBRACOES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR COM ESPESSURA UNIFORME
C  UNIFORMEMENTE COMPRIMIDA AO LONGO DA PERIFERIA
C  DIAMETRO DO EIXO = 0.4 DO DIAMETRO EXTERIOR DA PLACA
C  PROGRAMA AUXILIAR - DETERMINACAO DA SEGUNDA FREQUENCIA DE VIBRACAO
C  C O P P E - ARNO BLASS - 08/01/68
    EXTERNAL BLA1,BLA2,BLA3,BLA4,BLA5,BLA6
    DIMENSION AI(6),VAL(6,12)
    COMMON OMEGA
    ETA=-0.131
10  ETA=ETA-0.0005
    WRITE(3,5)ETA
    5  FORMAT(//'/RELACAO DE ENGASTE = ',F12.6//)
    WRITE(3,30)
30  FORMAT('/FREQUENCIA          MOMENTO NA BORDA          CORTANTE NA
1BORDA')
    OMEGA=2000.
20  OMEGA=OMEGA+5.
    AI(1)=0.
    AI(2)=0.
    AI(3)=ETA
    AI(4)=1.-ETA/0.4
    AI(5)=0.
    AI(6)=0.
    CALL RK3 (BLA1,BLA2,BLA3,BLA4,BLA5,BLA6,0.05,0.4,AI,2,12,VAL)
    XMOMB=VAL(3,12)+0.3*VAL(2,12)
    CORTB=VAL(4,12)+VAL(3,12)-VAL(2,12)
    WRITE(3,40)OMEGA,XMOMB,CORTB
40  FORMAT(F9.2,2F26.10)
    IF(OMEGA-2040.)25,25,50
25  IF(CORTB)50,50,20
50  IF(ETA+0.133)90,10,10
90  CONTINUE
    CALL EXIT
    END

```



A N E X O   I V

```

C  PROGRAMA PRINCIPAL - SOLUCAO DA EQUACAO DIFERENCIAL
C  C O P P E - ARNO BLASS - 08/01/68
    EXTERNAL BLA1,BLA2,BLA3,BLA4,BLA5,BLA6
    DIMENSION RO(12),AI(6),VAL(6,12),XM(12),Q(12)
    COMMON OMEGA
    WRITE(3,10)
10  FORMAT('/VIBRACOES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR ENGASTADA NU
1M EIXO',/,23X,'ESPESSURA UNIFORME',/,20X,'DIAMETRO DO EIXO / DIAME
2TRO DA PLACA = 0.4',/, 'RAIO ADIMENSIONALIZADO = RAIO GENERICO / RA
3IO EXTERNO DA PLACA'///)
    ETA=-0.198848
    OMEGA=704.7
15  AI(1)=0.
    AI(2)=0.
    AI(3)=ETA
    AI(4)=1.-ETA/0.4
    AI(5)=0.
    AI(6)=0.
    DO 20 J=1,12
20  RO(J)=0.4+0.05*J
    CALL RK3 (BLA1,BLA2,BLA3,BLA4,BLA5,BLA6,0.05,0.4,AI,2,12,VAL)
    DO 30 J=1,12
    XM(J)=VAL(3,J)+VAL(2,J)*(0.3/RO(J))
30  Q(J)=VAL(4,J)+VAL(3,J)/(RO(J))-VAL(2,J)/(RO(J)**2)
    IF(OMEGA-2042.15)35,80,80
35  WRITE(3,40)
40  FORMAT('/PRIMEIRO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 704.7 RADS/SEG'/
1)
    WRITE(3,50)
50  FORMAT('/RAIO ADIM.      DESLOCAMENTO      ROTACAO      MOM. FLETOR
1      ESF. CORTE '/')
    WRITE(3,60)
60  FORMAT('/      0.40      0.00000000      0.00000000      -0.19884800
1      1.00000000')
    WRITE(3,70)(RO(J),VAL(1,J),VAL(2,J),XM(J),Q(J),J=1,12)
70  FORMAT(F8.2,2F17.8,F16.8,F15.8)
    ETA=ETA+0.067348
    OMEGA=OMEGA+1337.45
    GO TO 15
80  WRITE(3,45)
45  FORMAT('/SEGUNDO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 2042.15 RADS/SE
1G'/)
    WRITE(3,55)
55  FORMAT('/RAIO ADIM.      DESLOCAMENTO      ROTACAO      MOM. FLETOR
1      ESF. CORTE '/')
    WRITE(3,65)
65  FORMAT('/      0.40      0.00000000      0.00000000      -0.13150000
1      1.00000000')
    WRITE(3,75)(RO(J),VAL(1,J),VAL(2,J),XM(J),Q(J),J=1,12)
75  FORMAT(F8.2,2F17.8,F16.8,F15.8)
    CALL EXIT
    END

```

T A B E L A I

---

VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR

---

PRIMEIRA FREQUENCIA, OBTIDA PELO METODO DE RITZ

RAIO ADIMENSIONALIZADO = RAIO GENERICO / RAIO EXTERNO

RAIO ADIMENSIONALIZADO	FREQUENCIA (RADS/SEG)
0.95	97548.959
0.90	20430.092
0.85	8640.007
0.80	4849.401
0.75	3172.155
0.70	2283.938
0.65	1756.297
0.60	1417.056
0.55	1186.169
0.50	1022.300
0.45	902.342
0.40	812.557
0.35	744.377
0.30	692.247
0.25	652.467
0.20	622.524
0.15	600.702
0.10	585.843
0.05	577.204
0.00	574.369

T A B E L A I I

RELACAO DE ENGASTE = -0.210000

FREQUENCIA	MOMENTO NA BORDA	CORTANTE NA BORDA
500.000	0.1014074954	0.0893504050
550.000	0.0630658780	0.0277948844
600.000	0.0152131566	-0.0760589642

RELACAO DE ENGASTE = -0.205000

FREQUENCIA	MOMENTO NA BORDA	CORTANTE NA BORDA
500.000	0.1266938511	0.1738315432
550.000	0.0942670396	0.1366672568
600.000	0.0531997333	0.0616956793
650.000	0.0018708289	-0.0614789028

RELACAO DE ENGASTE = -0.200000

FREQUENCIA	MOMENTO NA BORDA	CORTANTE NA BORDA
500.000	0.1519802044	0.2583126741
550.000	0.1254682002	0.2455396255
600.000	0.0911863099	0.1994503223
650.000	0.0476016211	0.1102856669
700.000	-0.0069973288	-0.0330081372

RELACAO DE ENGASTE = -0.195000

FREQUENCIA	MOMENTO NA BORDA	CORTANTE NA BORDA
500.000	0.1772665599	0.3427938119
550.000	0.1566693634	0.3544120029
600.000	0.1291728881	0.3372049713
650.000	0.0933324153	0.2820502446
700.000	0.0475342715	0.1786060520
750.000	-0.0100153808	0.0151996237
800.000	-0.0813028395	-0.2212956914

RELACAO DE ENGASTE = -0.190000

FREQUENCIA	MOMENTO NA BORDA	CORTANTE NA BORDA
500.000	0.2025529157	0.4272749506
550.000	0.1878705275	0.4632843838
600.000	0.1671594660	0.4749596192
650.000	0.1390632084	0.4538148173
700.000	0.1020658760	0.3902202575
750.000	0.0544815172	0.2732958304
800.000	-0.0055576290	0.0907939449
850.000	-0.0801139170	-0.1710286187

T A B E L A   I I I

VIBRACOES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR ENGASTADA NUM EIXO  
ESPESSURA UNIFORME

DIAMETRO DO EIXO / DIAMETRO DA PLACA = 0.4

RAIO ADIMENSIONALIZADO = RAO GENEICO / RAO EXTERNO DA PLACA

PRIMEIRO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 704.7 RADS/SEG

RAIO ADIM.	DESLOCAMENTO	ROTACAO	MOM. FLETOR	ESF. CORTE
0.40	0.00000000	0.00000000	-0.19884800	1.00000000
0.44	-0.00077563	-0.01357724	-0.09138674	0.79543947
0.50	-0.00240783	-0.01782330	-0.01829614	0.66425405
0.55	-0.00413629	-0.01591556	0.03358001	0.52712707
0.60	-0.00545791	-0.01000422	0.06803277	0.37111760
0.65	-0.00606297	-0.00186055	0.08638582	0.20457359
0.70	-0.00580767	0.00696188	0.08998333	0.04381060
0.75	-0.00469217	0.01514869	0.08113183	-0.09288315
0.80	-0.00283262	0.02171006	0.06332951	-0.18892611
0.85	-0.00042405	0.02607227	0.04110213	-0.23187555
0.90	0.00230486	0.02814425	0.01961988	-0.21476460
0.95	0.00514177	0.02834376	0.00422755	-0.13631240
1.00	0.00794100	0.02758096	0.00000547	-0.00000169

SEGUNDO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 2042.15 RADS/SEG

RAIO ADIM.	DESLOCAMENTO	ROTACAO	MOM. FLETOR	ESF. CORTE
0.40	0.00000000	0.00000000	-0.13150000	1.00000000
0.44	-0.00046275	-0.00753056	-0.03281555	0.77654224
0.50	-0.00123726	-0.00693746	0.02940676	0.52937619
0.55	-0.00170514	-0.00198156	0.05885036	0.21312597
0.60	-0.00160018	0.00399502	0.05689591	-0.10362799
0.65	-0.00096562	0.00822842	0.03078336	-0.32880798
0.70	-0.00006900	0.00908186	-0.00628497	-0.39982317
0.75	0.00073072	0.00638569	-0.03914184	-0.31141215
0.80	0.00112786	0.00131110	-0.05595738	-0.11720636
0.85	0.00097788	-0.00421762	-0.05243088	0.09149414
0.90	0.00033134	-0.00836961	-0.03326092	0.21921066
0.95	-0.00061748	-0.01021824	-0.01054330	0.19745295
1.00	-0.00165021	-0.01026223	-0.00009980	-0.00016397

T A B E L A    I V

VIBRACOES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR ENGASTADA NUM EIXO  
ESPESSURA UNIFORME

DIAMETRO DO EIXO / DIAMETRO DA PLACA = 0.3

RAIO ADIMENSIONALIZADO = RAIO GENERICO / RAIO EXTERNO DA PLACA

PRIMEIRO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA 513.76 RADS/SEG

RAIO ADIM.	DESLOCAMENTO	ROTACAO	MOM. FLETOR	ESF. CORTE
0.30	0.00000000	0.00000000	-0.17842000	1.00000000
0.34	-0.00069026	-0.01208364	-0.08491993	0.63915053
0.40	-0.00216029	-0.01632514	-0.02713645	0.53771329
0.44	-0.00379600	-0.01574398	0.01337680	0.44418744
0.50	-0.00520402	-0.01199539	0.04196063	0.34290371
0.55	-0.00612928	-0.00626584	0.06038309	0.23528798
0.60	-0.00642414	0.00045980	0.06952178	0.12754228
0.64	-0.00603266	0.00733007	0.07030311	0.02734675
0.70	-0.00497728	0.01363186	0.06404599	-0.05761405
0.75	-0.00334361	0.01882132	0.05254327	-0.12060675
0.80	-0.00126170	0.02255853	0.03800458	-0.15652279
0.85	0.00111574	0.02473417	0.02292174	-0.16228751
0.90	0.00363725	0.02548257	0.00989813	-0.13698554
0.95	0.00617691	0.02517888	0.00147568	-0.08169168
0.99	0.00865768	0.02442180	-0.00001052	0.00098371

SEGUNDO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 1495.90 RADS/SEG

RAIO ADIM.	DESLOCAMENTO	ROTACAO	MOM. FLETOR	ESF. CORTE
0.30	0.00000000	0.00000000	-0.12748000	1.00000000
0.34	-0.00045223	-0.00745962	-0.03832812	0.66287788
0.40	-0.00125701	-0.00775735	0.01506632	0.48567258
0.44	-0.00187445	-0.00415107	0.04458168	0.27666641
0.50	-0.00203638	0.00099355	0.05285640	0.05455635
0.55	-0.00169026	0.00572076	0.04297223	-0.13823120
0.60	-0.00095500	0.00859071	0.02060787	-0.26250134
0.64	-0.00005944	0.00887048	-0.00651486	-0.29678806
0.70	0.00073371	0.00661508	-0.03038160	-0.24379348
0.75	0.00120329	0.00256735	-0.04471808	-0.12921662
0.80	0.00122601	-0.00211339	-0.04659959	0.00577323
0.85	0.00079994	-0.00622632	-0.03716871	0.11576049
0.90	0.00002913	-0.00891140	-0.02130666	0.16245021
0.95	-0.00092634	-0.00994602	-0.00644359	0.12261415
0.99	-0.00192298	-0.00989740	-0.00098001	-0.01008552

T A B E L A    V

VIBRACOES TRANSVERSAIS DE UMA PLACA CIRCULAR ENGASTADA NUM EIXO  
ESPESSURA UNIFORME

DIAMETRO DO EIXO / DIAMETRO DA PLACA = 0.2

RAIO ADIMENSIONALIZADO = RAIO GENERICO / RAJO EXTERNO DA PLACA

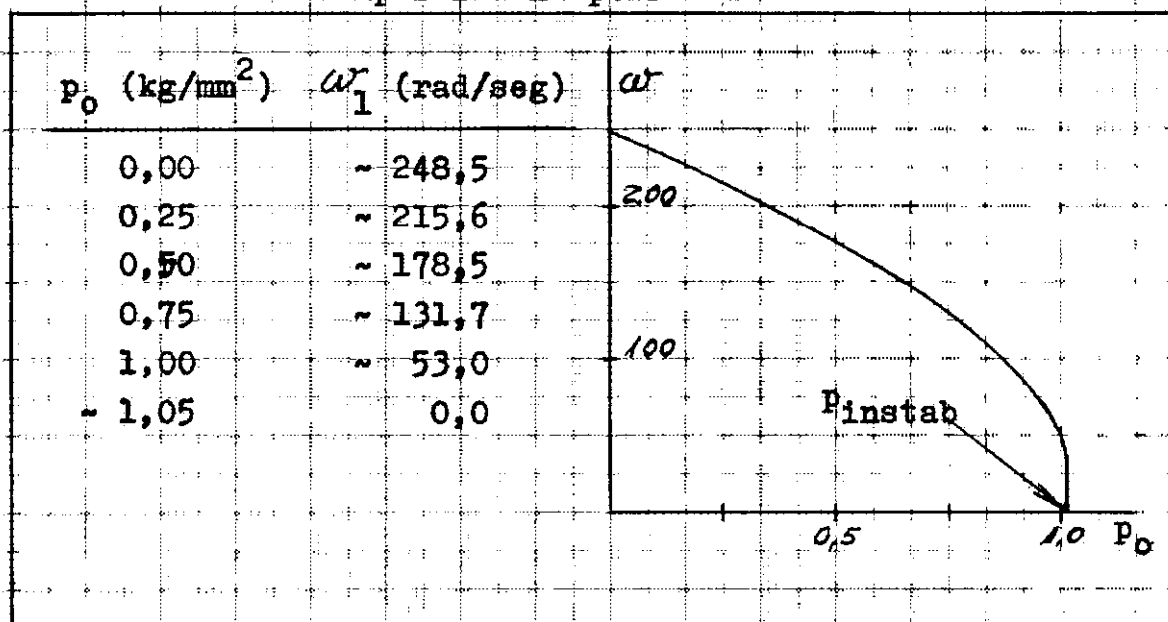
PRIMEIRO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 389.33 RADS/SEG

RAIO ADIM.	DESLOCAMENTO	ROTACAO	MOM. FLETOR	ESF. CORTE
0.20	0.00000000	0.00000000	-0.13849000	1.00000000
0.25	-0.00050310	-0.00869383	-0.06246653	0.45476937
0.30	-0.00155794	-0.01175331	-0.02464072	0.38344604
0.35	-0.00275356	-0.01176168	0.00092938	0.31980199
0.40	-0.00384565	-0.00981737	0.01942417	0.25508760
0.45	-0.00467458	-0.00659407	0.03243177	0.19001168
0.50	-0.00513915	-0.00260882	0.04058141	0.12648380
0.55	-0.00518567	0.00169860	0.04429196	0.06679463
0.60	-0.00480148	0.00594672	0.04403525	0.01338521
0.64	-0.00400906	0.00981556	0.04043091	-0.03137703
0.70	-0.00285936	0.01305773	0.03426613	-0.06542073
0.75	-0.00142394	0.01551052	0.02647522	-0.08715841
0.80	0.00021402	0.01710555	0.01809621	-0.09561713
0.85	0.00196949	0.01787404	0.01021560	-0.09049948
0.89	0.00376553	0.01794691	0.00391013	-0.07216979
0.95	0.00554310	0.01754983	0.00019320	-0.04156650
0.99	0.00727011	0.01699398	-0.00002713	-0.00004627

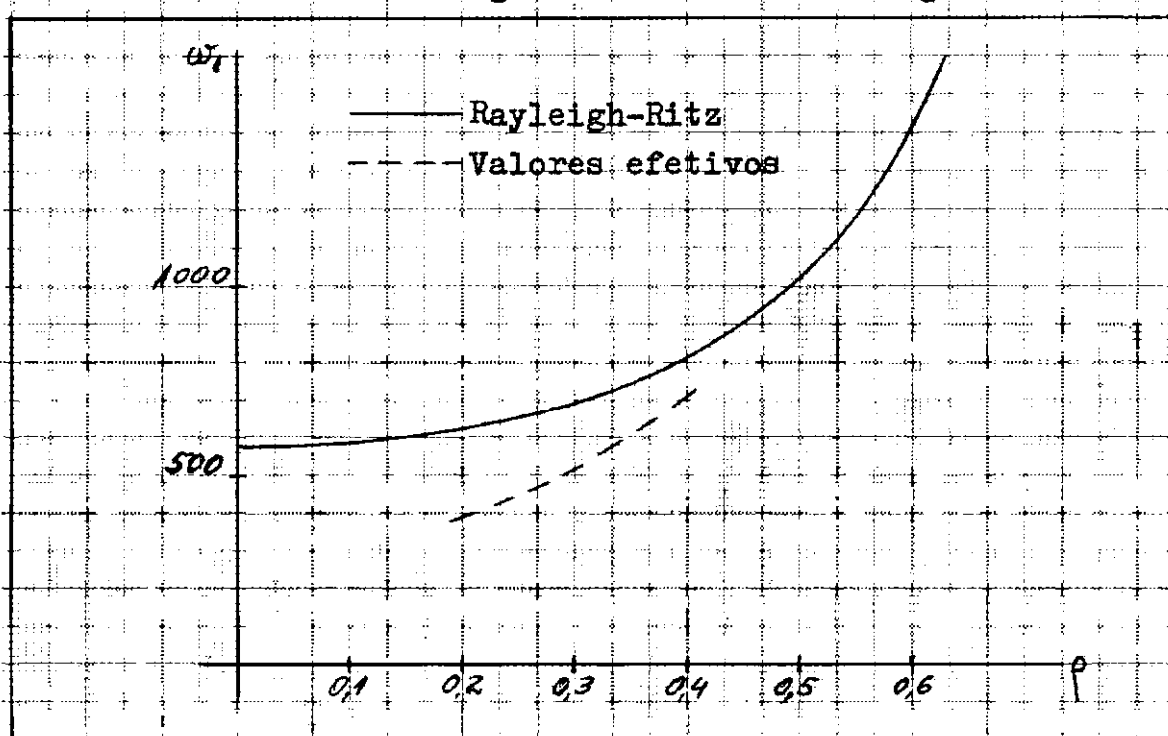
SEGUNDO MODO DE VIBRACAO - FREQUENCIA = 1130.86 RADS/SEG

RAIO ADIM.	DESLOCAMENTO	ROTACAO	MOM. FLETOR	ESF. CORTE
0.20	0.00000000	0.00000000	-0.10613200	1.00000000
0.25	-0.00036710	-0.00602696	-0.03378483	0.49915973
0.30	-0.00103038	-0.00661944	0.00411842	0.37672918
0.35	-0.00160064	-0.00446555	0.02615435	0.24726634
0.40	-0.00188136	-0.00103648	0.03597018	0.11225098
0.45	-0.00180295	0.00255017	0.03521228	-0.01260870
0.50	-0.00139570	0.00541559	0.02604322	-0.11066549
0.55	-0.00076415	0.00696384	0.01153706	-0.16949530
0.60	-0.00005588	0.00693650	-0.00465873	-0.18391117
0.64	0.00057325	0.00542383	-0.01895736	-0.15711395
0.70	0.00099209	0.00281514	-0.02851277	-0.09997255
0.75	0.00111910	-0.00030686	-0.03176296	-0.02871608
0.80	0.00093486	-0.00330813	-0.02871325	0.03837246
0.85	0.00047961	-0.00565357	-0.02090766	0.08447553
0.89	-0.00016339	-0.00703702	-0.01111359	0.09715081
0.95	-0.00089561	-0.00746816	-0.00281499	0.06993357
0.99	-0.00163684	-0.00730620	0.00034003	0.00218357

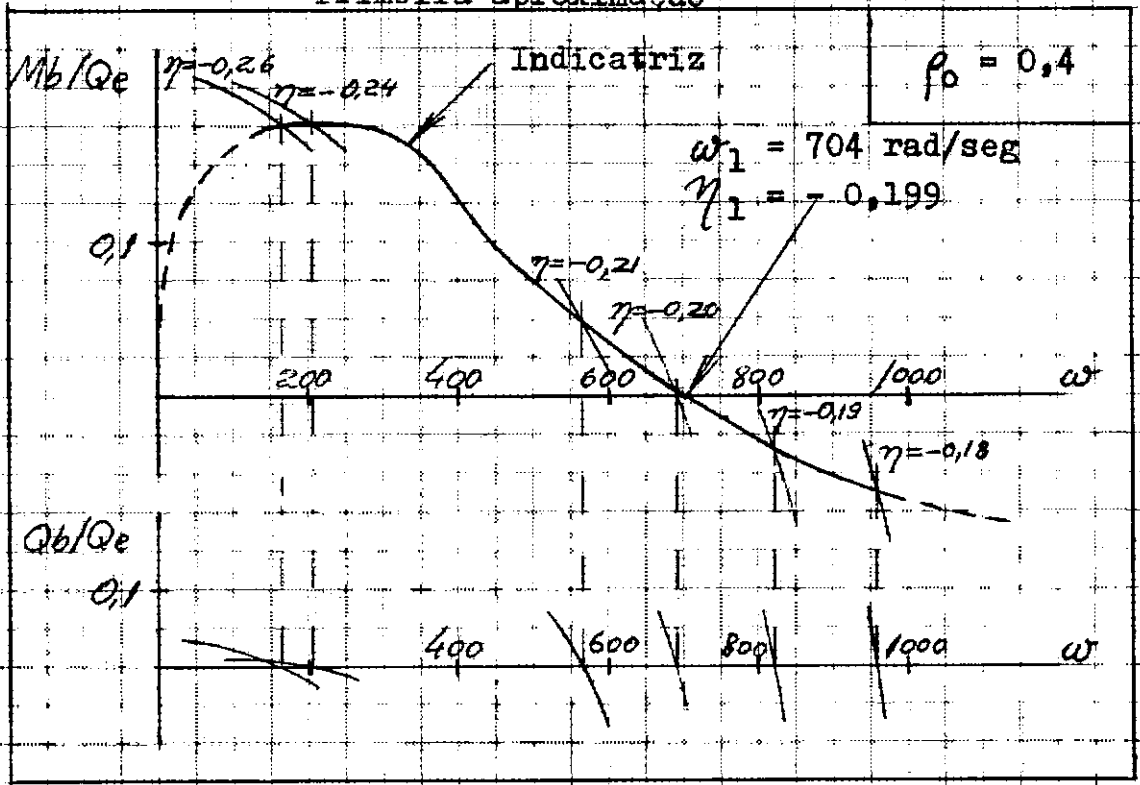
**DIAGRAMA I** - Primeira frequência de vibração e carga de instabilidade - Placa sem furos, apoiada e comprimida na periferia



**DIAGRAMA II** - Primeira frequência, pelo método de Rayleigh-Ritz, e comparação com os valores efetivos - Placa engastada num eixo - Carga radial



**DIAGRAMA III** - Placa circular engastada num eixo, e uniformemente comprimida na periferia.  
Primeiro modo de vibração  
Primeira aproximação



**DIAGRAMA IV** - Idem  
Primeiro modo de vibração  
Segunda aproximação

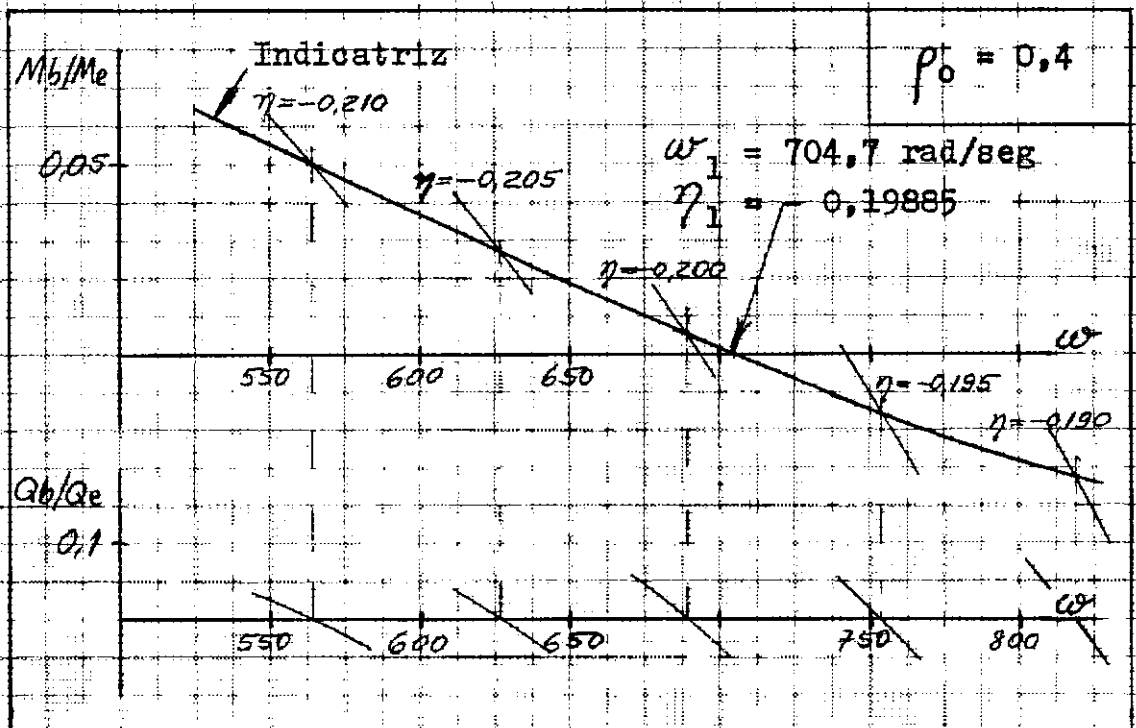
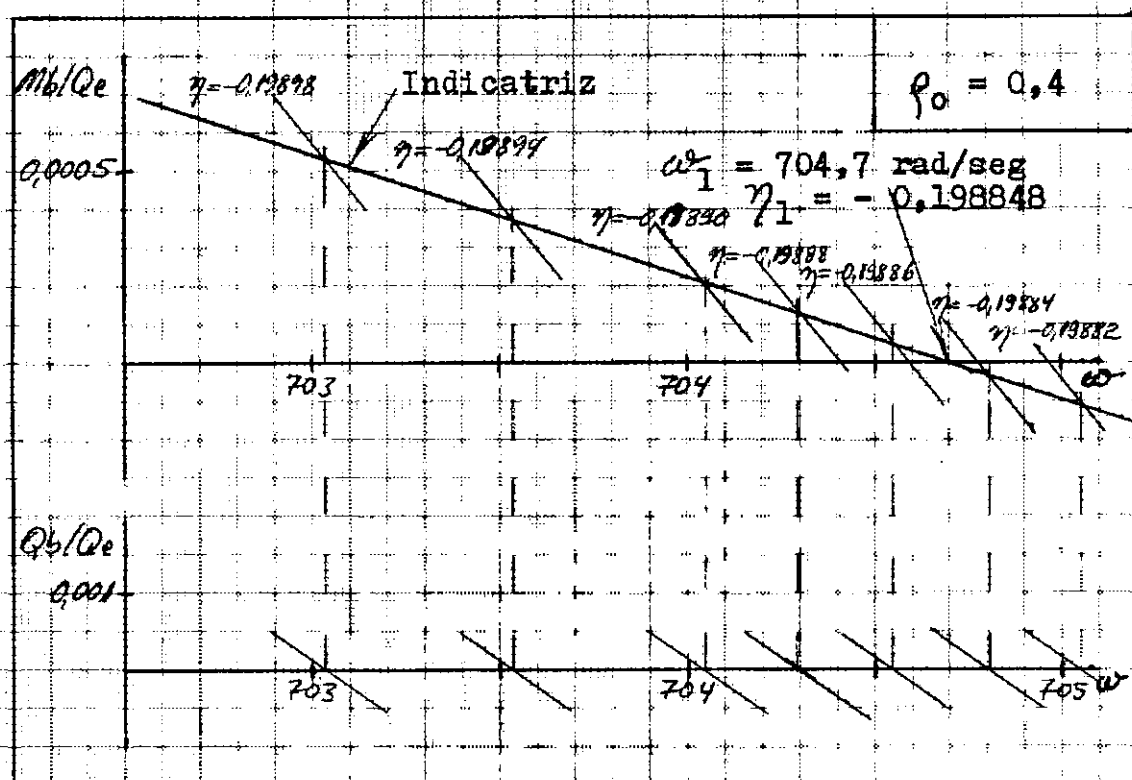




DIAGRAMA V - Idem

Primeiro modo de vibração  
Terceira aproximação

DIAGRAMA VI - Idem

Segundo modo de vibração

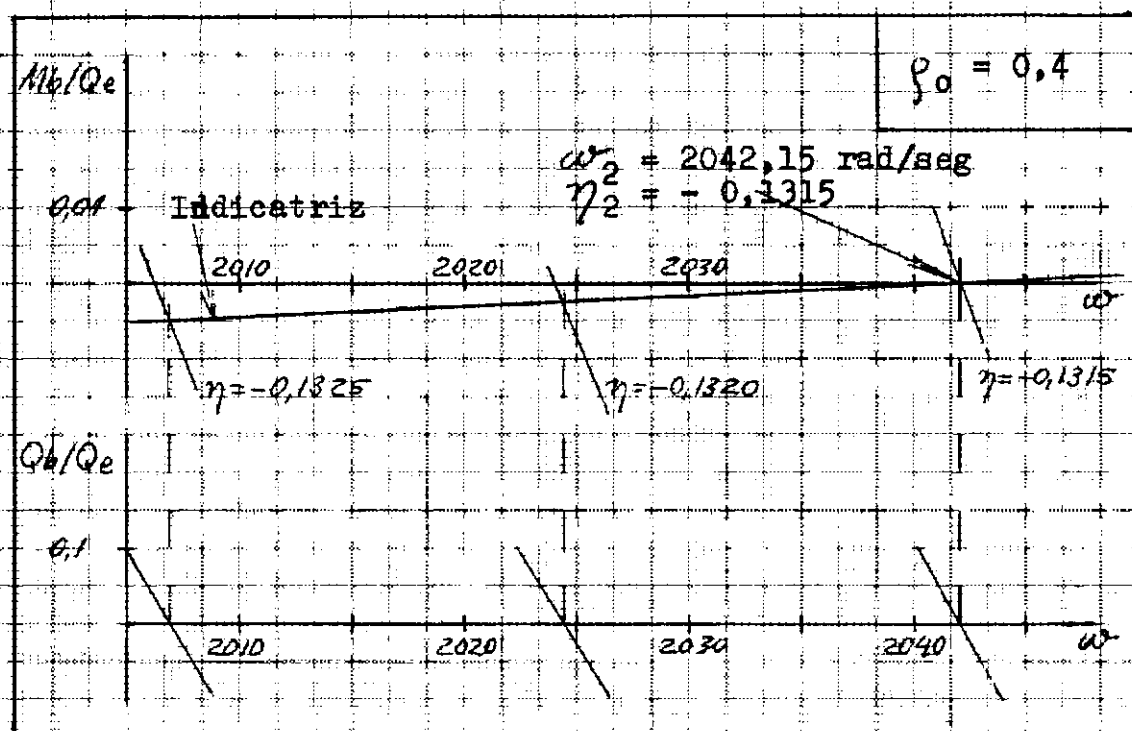


DIAGRAMA VII - Idem  
Primeiro modo de vibração

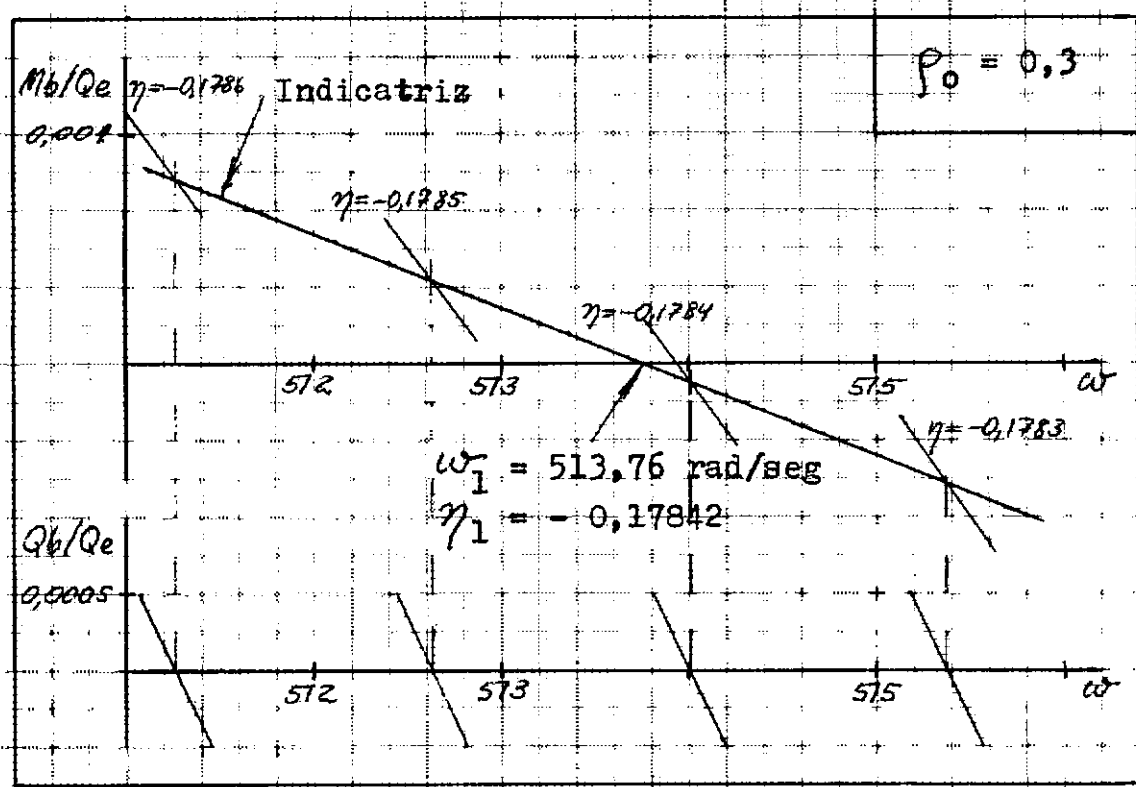


DIAGRAMA VIII - Idem  
Segundo modo de vibração

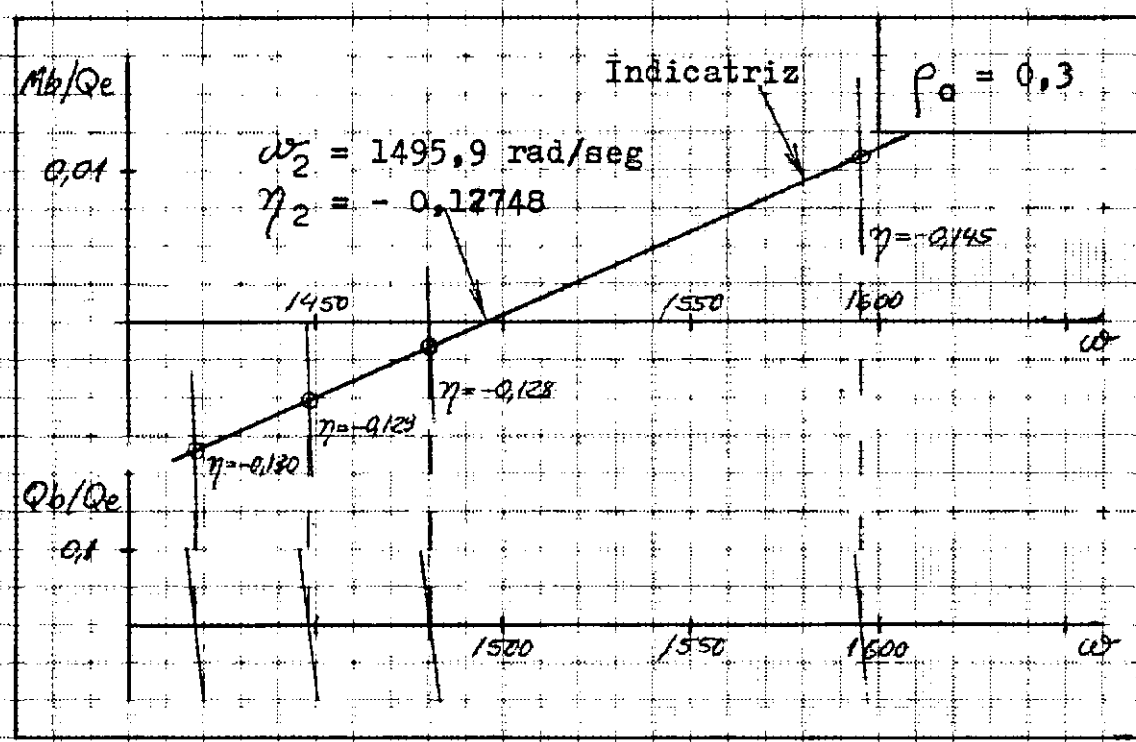


DIAGRAMA IX - Idem  
Primeiro modo de vibração

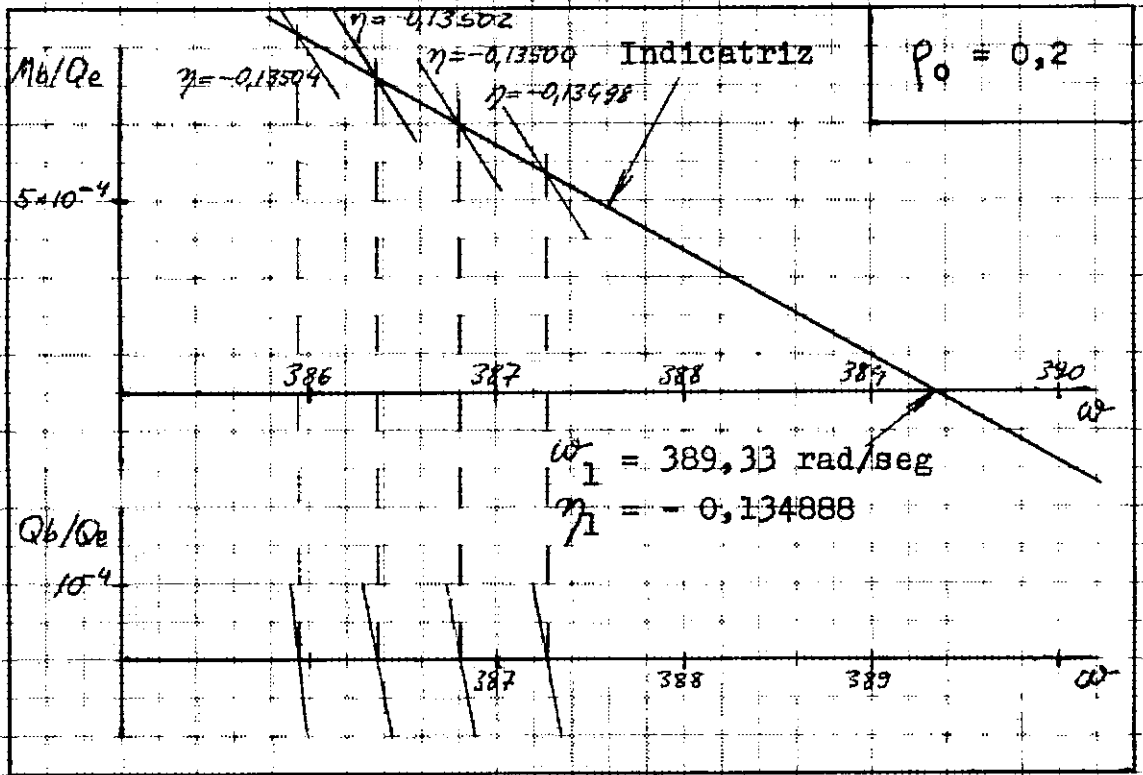


DIAGRAMA X - Idem  
Segundo modo de vibração

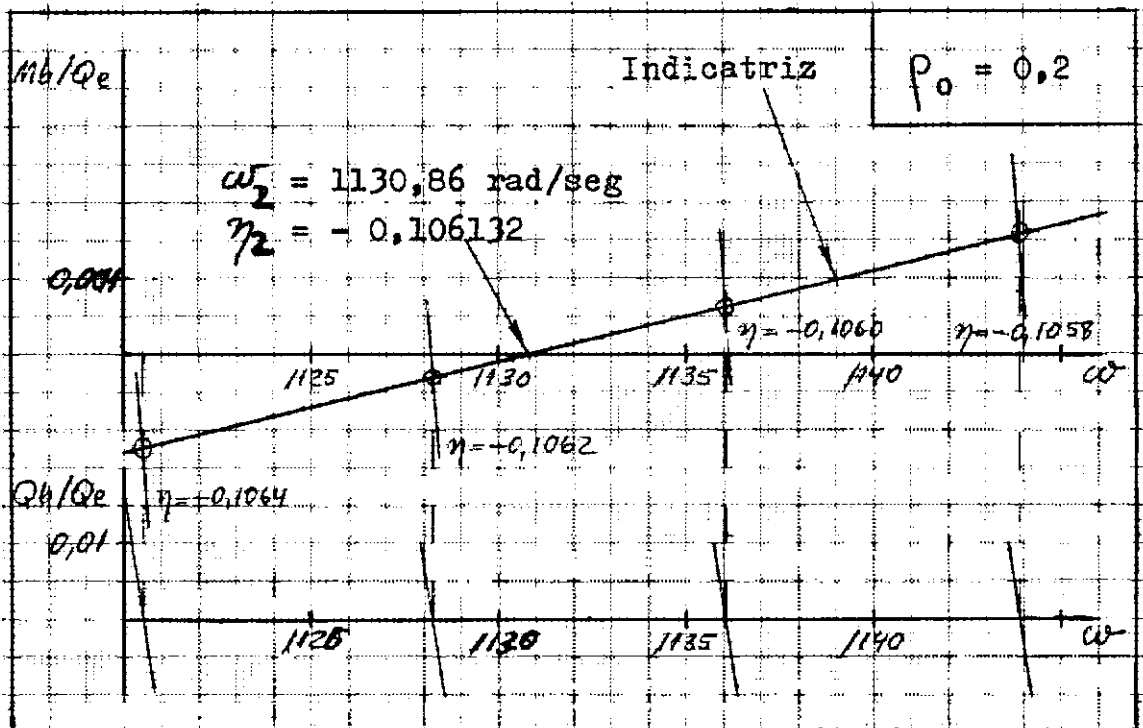


DIAGRAMA XI - Idem  
Terceiro modo de vibração - Tentativa

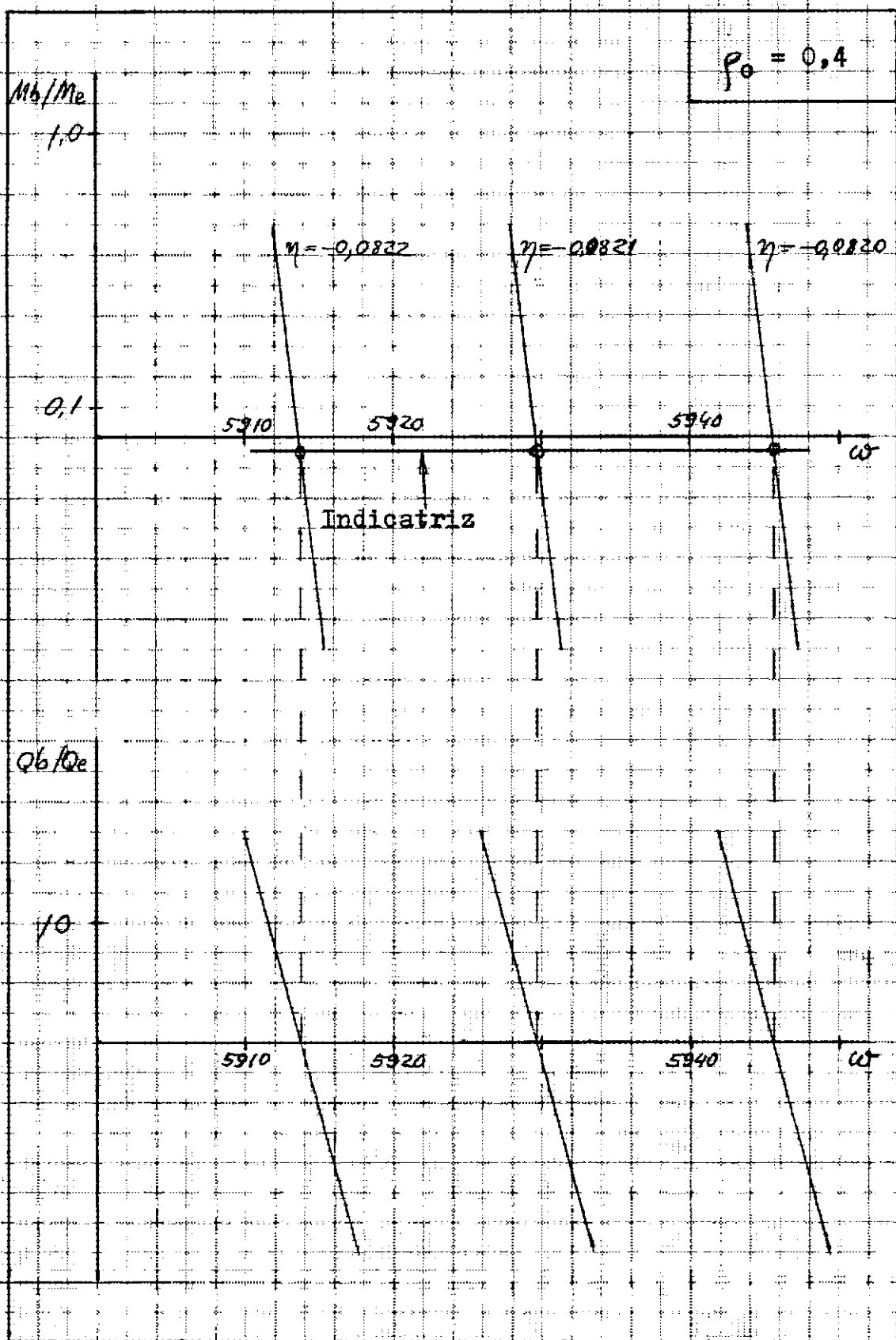


DIAGRAMA XII - Idem  
Solução da Equação diferencial

$$p_0 = 0,4$$

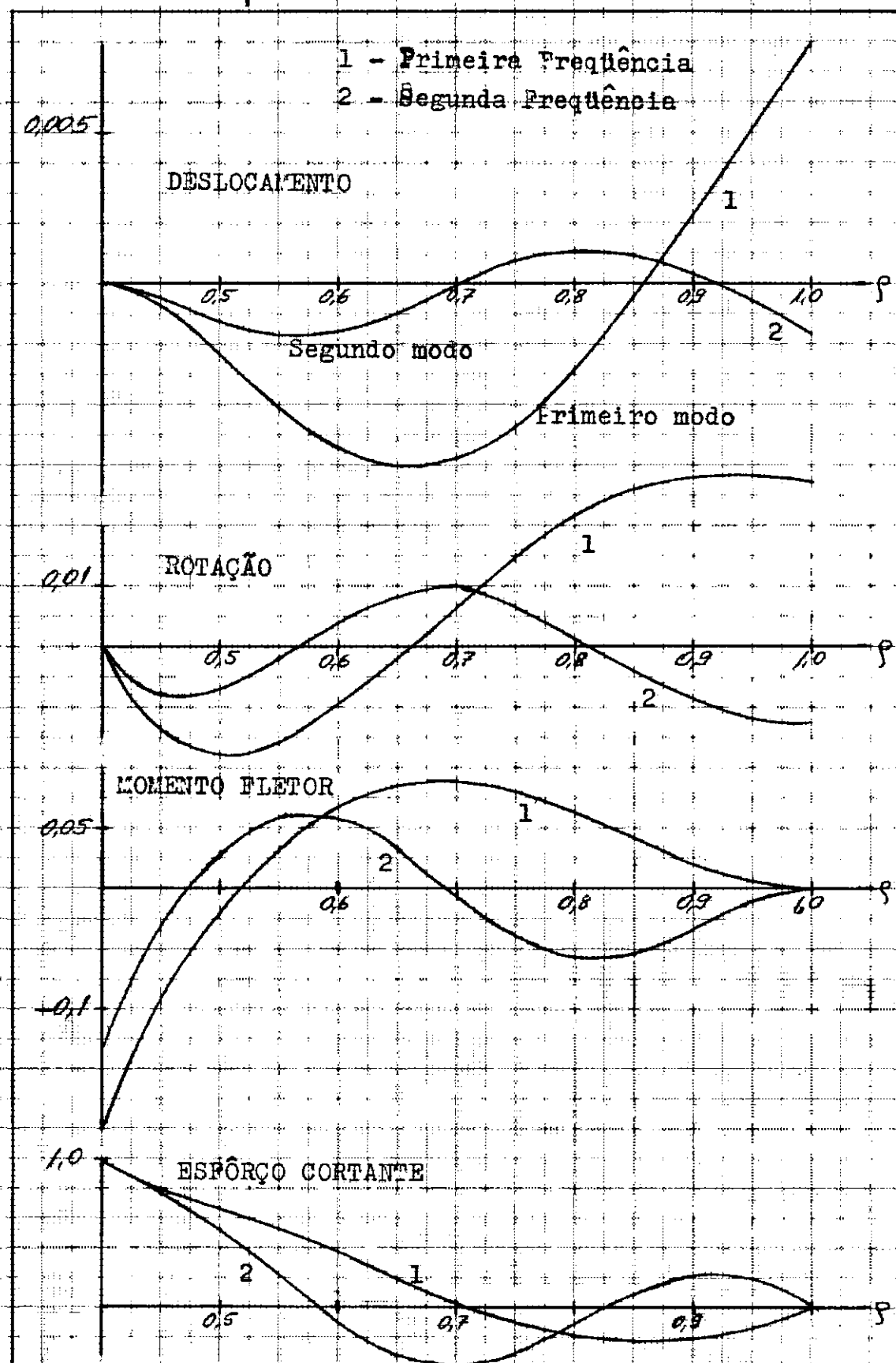


DIAGRAMA XIII • Idem  
Solução da Equação diferencial

$p_0 = 0,3$

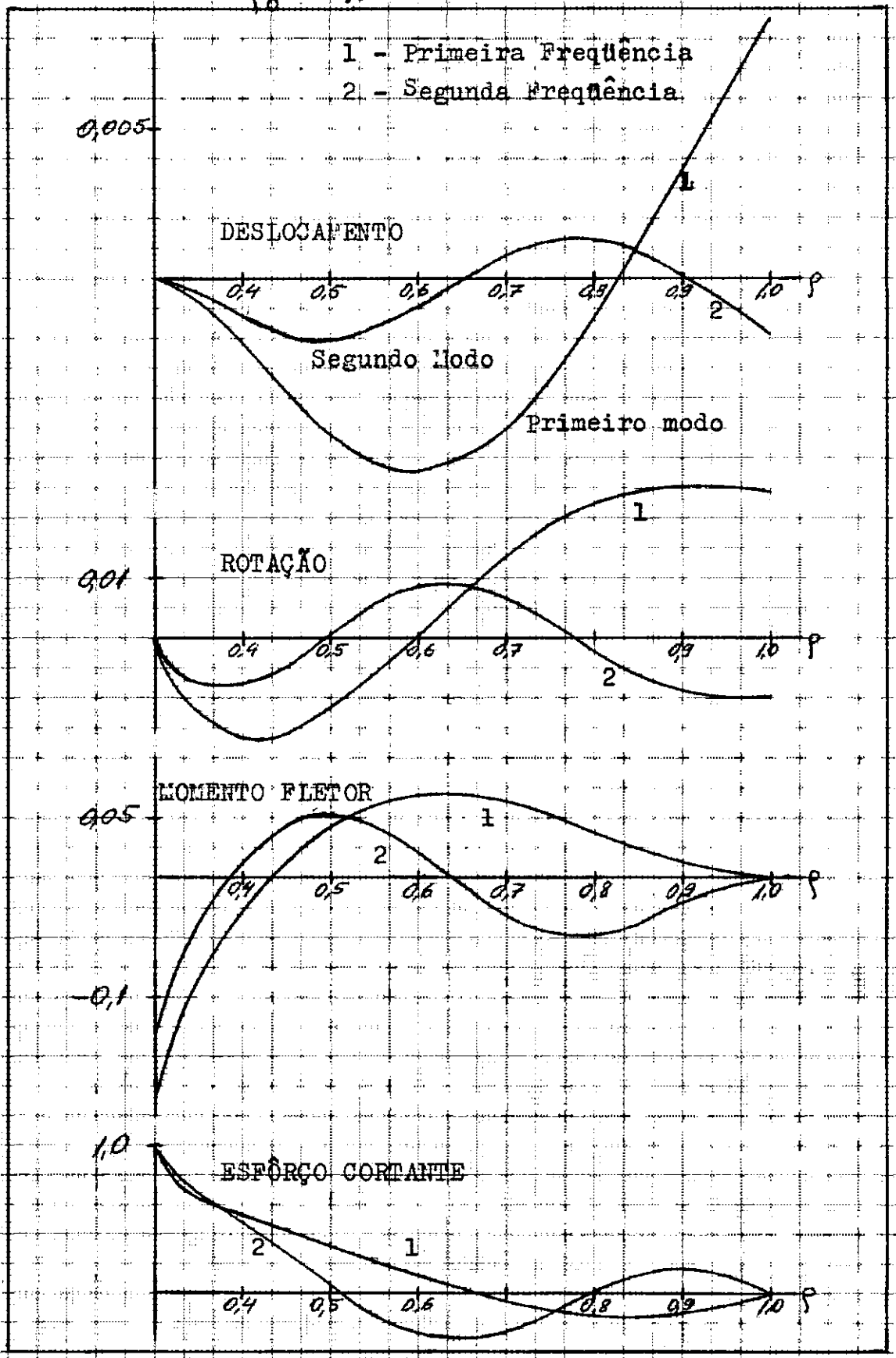


DIAGRAMA XIV - Idem  
 Solução da Equação diferencial  
 $\rho_0 = 0,2$

